This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

QA
145
B44

QA
145
.B44

PRINCIPJ
DI ARITMETICA, E DI ALGEBRA

DI

SERAFINO BELLI

PUBBLICO PROFESSORE DI GEOMETRIA

NELL' I. E R. UNIVERSITA' DI SIENA.

SIENA 1825.

Presso Guido Mucci

Con Approvazione.

QA
145
.B44

PRINCIPJ
DI ARITMETICA, E DI ALGEBRA
DI

SERAFINO BELLI
PUBBLICO PROFESSORE DI GEOMETRIA

NELL' I. E R. UNIVERSITA' DI SIENA.

SIENA 1825.

Presso Guido Mucci

Con Approvazione.

Hist. of Sci.
Gorinelli
4-6-24
12523

L' Algebra è un metodo analitico; ma se tutte le lingue sono esse pure metodi analitici, dunque ella non è che una lingua ..... L' Algebra è una prova maravigliosa che i progressi delle Scienze dipendono soltanto da quelli delle lingue; e che le sole lingue ben formate potrebbero condurre l' analisi a quel grado di semplicità, e di precisione, di cui è suscettibile.

Condillac. Logica. Parte seconda Cap. VII. sul fine

PRINCIPJ DI ARITMETICA, E DI ALGEBRA

PARTE PRIMA

Algoritmo delle quantità Numeriche, e Letterali

CAP. I.

Algoritmo dei Numeri intieri

1. L'Aritmetica è la scienza del calcolo dei numeri. Sotto il nome generico di calcolo si intendono tutte quelle operazioni, che danno resultamenti certi delle diverse modificazioni dei numeri. Avanti di esaminare le modificazioni, che competono ai numeri fà d'uopo vedere il sistema della numerazione, e quello dei caratteri dai quali vien rappresentata

2. Il sistema della numerazione universalmente ricevuto consiste nel rappresentare le *unità* da *uno* fino a *nove*; con le cifre

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

Dipoi allorchè il numero è giunto al *dieci*, incomincia un altra simile classe di numerazione per *diecine*, che si esprimono colla cifra o (che dicesi *zero*, e per se nulla conta) unita alle stesse cifre, cioè; 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90

Quindi siegue altra simile classe di *centinaja*, cioè *diecine di diecine*, espresse in tal modo; 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900,

Allorchè siamo a *dieci centinaia* si forma un altra classe di unità detta *migliaio*, ed espressa con le

N.B.S.

solite cifre unite a tre *zeri*: quindi vengono le *diecine di migliaio*, le *centinaia di migliaia* accrescendovi sempre progressivamente un *zero*. *Dieci centinaia di migliaia* formano l'unità detta *milione*; e quindi nella progressione in addietro prescritta *dieci centinaia di migliaia di milioni* formano il *bilione*: dipoi con egual progressione formasi il *trilione*, il *quadrilione* ec. in infinito.

3. Si è convenuto che le cifre 1, 2, 3, ... 9 comunque combinate esprimano un numero composto collo stesso ordine spiegato precedentemente per lo *zero*. In conseguenza nei numeri composti di più cifre, la prima cifra a destra esprimerà le unità, la seconda *le diecine*, la terza *le centinaia*, la quarta *le migliaia*, e così di seguito. Che se fra queste cifre si incontra il zero, ciò significa che nel posto dove egli è manca quella classe di numeri, a cui spetta quel posto medesimo. Per esempio 102 significa *due unità, nessuna diecina, ed un centinaio*; onde questo numero si leggerà *centodue*. Parimente 50046 significa *sei unità, quattro diecine, nessun centinaio, nessun migliaio, cinque diecine di migliaia*. Adunque il numero 50046 si legge *cinquantamila quarantasei*.

4. Inteso questo sistema di numerazione resterà facile leggere un numero composto comunque di più cifre. Si dividano le cifre del numero dato a tre per tre con virgola come nell'esempio annesso, incominciando a destra, e progredendo verso sinistra.

5, 718, 300, 574, 035, 469, 103

Sulla settima cifra, che esprime *unità di milione* si faccia un punto; quindi sulla settima susseguente si segnino due punti, che denoteranno *l'unità*

di bilione. Sulla settima susseguente al bilione si segnino tre punti, che denoteranno il *trilione*, e così progressivamente. Premesse tutte queste notazioni non vi sarà difficoltà per leggere il numero proposto, e quello dell' annesso esempio si leggerà: *cinque trilioni, settecento diciottomila trecento bilioni, cinquecento settantaquattromila trentacinque milioni, quattrocento sessantanovemila centotre unità*. Seguendo queste medesime riflessioni sul sistema della numerazione si imparerà a scrivere per mezzo delle cifre 1, 2, 3 ec. un numero qualunque dato in comuni parole.

5. Le modificazioni competenti ai numeri sono sei:

Prima. Ridurre più numeri sciolti in un solo numero complesso, conforme i numeri 18, 4, 7 si possono riunire nel solo numero 29. Questa operazione dicesi *Somma*.

Seconda. Da un numero maggiore togliere un minore, o sivvero trovare la differenza fra due numeri dati. Così togliendo dal 10 il 7 si ha il residuo 3; il che torna lo stesso dicendo: la differenza tra il 10, ed il 7 è il 3. Questa operazione dicesi *Sottrazione*.

Terza. Si può aggiungere più volte un numero a se medesimo. Questa somma reiterata dello stesso numero forma quella Operazione, che dicesi *Moltiplica*. Così Moltiplicare il 7 per 3 significa sommare tre volte il numero 7 per averne il resultamento 21.

Quarta Si può da un dato numero sottrarre più volte uno stesso numero, onde sapere quante volte il secondo è contenuto nel primo numero. Così osservando che il 4 può sottrarsi cinque volte dal 20 si argomenta che il 4 si contiene cinque volte nel 20. L'Operazione, che insegna a tro-

vare quante volte un numero può sottrarsi da un altro, o sivvero quante volte un numero si contiene in un altro, dicesi *Divisione*.

Quinta. Si può moltiplicare più volte un numero per se medesimo: come sarebbe moltiplicando il 3 per 3, si avrebbe 9; dipoi il 9 per 3, e si avrebbe 27; quindi 27 per 3 e si avrebbe 81, e così di seguito. Questa Operazione dicesi *Elevazione a potenza*. Ogni numero è *potenza prima* di sè; il primo prodotto della moltiplica di un numero in se stesso, come sarebbe 9 rispetto al 3, dicesi *potenza seconda*. Il 27 è potenza terza del 3; il numero 81 ne è la *quarta*, e così progressivamente.

Sesta. Si può infine investigare qual sia quel numero che moltiplicato un certo numero di volte in se stesso produca un dato numero. Per esempio dato il numero 144 trovare il numero 12, che lo produce moltiplicandosi una volta in se stesso: dato il numero 729, trovare il numero 9 che lo produce se si moltiplica due volte in se stesso. Questo investigamento dicesi *Estrazione di radice*, la quale, come apparisce, è l' Operazione inversa della *Elevazione a potenza*. Nella *Estrazione di radice* se il numero da trovarsi forma con una sola moltiplica in sè il numero dato, quello dicesi *radice seconda*, ovvero *quadra* di questo. Così il 9 *è radice seconda* (*o quadra*) dell' 81. Se il numero da trovarsi ha da formare con due moltiplicazioni in se il dato numero, quello dicesi *radice terza*, ed anche *cuba* di questo. Similmente se il numero da trovarsi dee formare con tre, quattro, cinque ec. moltipliche in se stesso un dato numero, il primo dicesi *radice quarta, quinta, sesta ec.* del dato numero.

6. L' Aritmetica comprende ordinariamente le prime quattro delle enunciate Operazioni; cioè la

Somma; la *Sottrazione*, la *Moltiplica* la *Divisione*. Le altre due rimanenti, cioè la *Elevazione* a *potenza*, è l' *Estrazione di radice*, comechè le possano appartenere, siccome pella loro dimostrazione l' Aritmetica non ha metodo facile, ed esatto, così ci riserbiamo a trattarle dopo alcuni principj dell' Algebra.

7. Per annunziare le operazioni che si vogliono fare nei numeri, e generalmente in ogni sorta di quantità, usano i Mattematici alcuni segni, che è bene conoscere fino da principio.

Il segno della somma è $+$, e si pronunzia *più*

Il Segno della sottrazione è $-$, e si pronunzia *meno*

Il segno $=$ denota eguaglianza, e si pronunzia *eguale*. Così scrivendo $7 + 3 = 10$, viene espresso che *il 7 aggiunto al 3 eguaglia il* 10. Scrivendo $8 - 2 = 6$ significa che *sottratto il* 2 *dall'* 8, *l' avanzo, ovvero la differenza è* 6.

Il segno $>$ si usa per annunziare che una quantità è maggiore, ed ancora minore di un altra. Scrivendo per esempio $7 > 2$, si legge *sette maggiore di due*. Al contrario scrivendo $3 < 8$ si legge *tre minore di otto*. Adunque il segno $>$ significa *maggiore* rispetto a quella quantità posta accanto ai suoi lati; significa *minore* rispetto alla quantità posta accanto alla sua punta.

Allorchè si vuole annunziare la moltiplica di due numeri vi si frappone il segno X, ovvero un punto. Scrivendo $7X5 = 35$, $.6 \; 4 = 12$ si legge il primo scritto *sette via cinque eguale a trentacinque*, ed il secondo si legge *tre via quattro eguale a dodici*. Se però più numeri debbono moltiplicare altri più numeri, in questo caso la moltiplica si annunzia scrivendo i primi fra due parentesi, ed i secondi pure

fra due parentesi. Perciò $(7+5)$ $(8+11+4)$ significa che il 7 *unito al* 5 *deve moltiplicare la somma dei numeri* 8, 11, 4. E parimente 18 $(17+21)$ significa che il 18 *deve moltiplicare la somma* $17+21$.

Volendo annunziare la divisione del 21 per 3 si scrive $\frac{21}{3}$, e si pronunzia *ventuno diviso per* tre; Si scrive ancora $3:21$, ma in questo modo si pronunzia; *tre stà in ventuno*.

La *Elevazione a potenza* si esprimerebbe naturalmente col segno stesso della moltiplica. In tal guisa scrivendo $7X7X7=343$, oppure scrivendo $3.3.3.3.3.=243$, si annunzierebbe nel primo caso che 343 è *la terza potenza* del 7, e nel secondo caso che il 243 è *la quinta potenza* del 3. Ma piuttosto si usa prendere il numero, che esprime la potenza a cui si vuole elevare un dato numero, e quello si pone sulla destra di questo un poco in alto. Così invece di scrivere $7X7X7$ si scrive 7^3, e si pronunzia *sette alla terza potenza*, ovvero semplicemente *sette alla terza*. Similmente invece di scrivere $3.3.3.3.3$ si scrive 3^5, e si pronunzia *tre alla quinta*. In conseguenza 9^{10}, 11^4, 13^6 significheranno *nove alla decima*, *undici alla quarta*, *tredici alla sesta potenza*. Allorchè poi diversi numeri congiunti insieme comunque debbono elevarsi ad una qualunque potenza, si scrivono questi numeri fra due parentesi, e sulla parentesi a destra si pone il numero della potenza, alla quale si vogliono elevare. Così scrivendo $(5+7+4X9-11)^7$ viene enunciato che *la somma del* $5+7$ *e del prodotto* $4X9$ *meno* 11 *debbesi elevare alla settima potenza*.

Finalmente il Segno $\sqrt{}$ annunzia generalmente la *Estrazione della Radice*. Ma se la radice è seconda si scrive $\sqrt[2]{}$, o semplicemente $\sqrt{}$: Se poi la *radice è terza, quarta, quinta* ec. allora si annunzia scrivendo $\sqrt[3]{}$ $\sqrt[4]{}$ $\sqrt[5]{}$ ec. Così scrivendo $\sqrt{582}$ $\sqrt[3]{859}$, $\sqrt[4]{8216}$ $\sqrt[5]{1075}$ viene espresso che dal 582 si vuole estrarre la *radice seconda*; dall' 859 la *terza*; dall' 8216 la *quarta*; dal 1075 la *radice quinta*.

8 Tutti i descritti segni formano una parte integrale della lingua del calcolo; e questa lingua acquista per essi due pregi singolarissimi, che non si possono appieno intendere prima di aversene reso familiare l' uso. Il primo pregio apparisce considerando che questi segni non attengono a parole speciali di alcuna lingua parlata, e perciò costituiscono in se una lingua universale. Il secondo pregio, anche maggiore, consiste nel sommo laconismo, e precisione che questi segni introducono nelle espressioni del Calcolo. E' dimostrato dalla sana Filosofia che la nostra mente percepisce le idee colla massima chiarezza, e le combina in maggior numero, quando quelle sono rappresentate col minimo numero di segni. Adunque la lingua che ha il minimo numero di segni, che esprimono le cose colla massima universalità, è quella che conduce direttamente le nostre percezioni alla chiarezza, e quindi al vero. Tale è la lingua Mattematica sovra quante altre se ne conosce.

Dopo queste preliminari nozioni incominciamo a trattare partitamente di ciascuna Operazione dell' Aritmetica adoprandovi all' uopo i segni qui sopra descritti.

SOMMA

9. E' principio evidente che non si possono riunire più quantità fra loro, se queste non sieno *omogenee*, cioè della stessa specie. Infatti 18 lire, 4 libri, 5 penne non possono ridursi in un solo numero se non adopriamo il termine generico di *cosa*, e diciamo che formano la somma di 18 + 4 + 5 = 27 *cose*. Nel sistema di numerazione già spiegato (2) le *unità* sono fra loro omogenee; così fra loro sono omogenee le *diecine*, le *centinaia* ec. Adunque la prima regola da osservarsi per la somma di più numeri composti sarà *il porgli l' uno sotto l' altro in modo che le cifre delle unità corrispondano in colonna fra loro; così le diecine sieno sotto le diecine, le centinaia sotto le centinaia* ec. come vedesi nell' annesso esempio.

Disposte in tal modo le cifre, e tirata una Linea al di sotto, si incomincerà la somma da destra, cioè dalle *unità* seguendo dipoi verso sinistra. Pertanto nell' annesso esempio si dirà; 5 + 7 + 9 + 1 + 9 + 4 = 35; si segnerà sotto la linea il 5 *unità* incolonna colle *unità*, e si porteranno le 3 *diecine* per aggiungersi alla fila delle *diecine* appresso, dicendo. 3 + 1 + 1 + 1 + 4 + 4 + 5 = 19; si segneranno nella loro colonna 9 *diecine*, e si porterà un *centinaio* per aggiungersi alla fila delle *centinaia*, dicendo; 1 + 3 + 7 + 2 + 3 = 16. Si segnerà il 6 sotto le *centinaia*, e si porterà un *migliaio* per aggiungersi alla fila delle *migliaia*; e così di seguito

5878354
1249249
3578041
7395719
317
15
18101695

Frà le molte *riprove* usate per verificare la *Somma* è assai ingegnosa quella detta del nove, tanto

più che si estende a tutte le altre operazioni aritmetiche. Questa *riprova*, riguardo alla somma, consiste nel togliere il *nove* quante volte si può dalle somme parziali delle cifre dei Numeri da sommarsi, tenendo conto in fine dell' avanzo se vi è.

Dipoi si toglie similmente il 9 quante volte si può dalle cifre sommate del numero della Somma fatta, e si nota l' avanzo se vi è. Qualora la Somma sia ben fatta deve ottenersi in questa lo stesso avanzo ottenuto in principio, ovvero nessuno avanzo se in principio ancora l' avanzo è stato *zero*. Applicando questa *riprova* al passato esempio si dice; 4 + 5 = 9, tolgo il 9 resta *zero*; 8 + 5 = 13, tolgo il 9 resta 4. Dipoi 4 + 4 + 2 = 10, tolgo il 9 resta 1 ec; e così proseguendo si troverà l' ultimo avanzo 4, il quale scrivo come mostra la figura qui fatta.

4 | 4

Passo quindi a togliere similmente il 9 dalle cifre della somma 18101695, e trovo lo stesso avanzo 4: onde conchiudo che l' operazione fatta stà bene. La dimostrazione di questa riprova non può intendersi prima di avere appreso la *Divisione*; la daremo perciò dopo aver trattato di tale Operazione.

SOTTRAZIONE

10. Anche in questa Operazione conviene disporre le cifre dei numeri come nella somma, cioè le *unità* in fila sotto le *unità*, le *diecine* sotto le *diecine ec*; e ciò per la ragione, che non può togliersi una quantità da un altra se ambedue non sieno *omogenee*.

Disposte adunque le cifre dei numeri su i quali dee farsi la sottrazione, come nell' annesso esempio, incomincio dalle unità, e proseguo verso sinistra dicendo; 7 — 6 = 1 ; il quale avanzo segno sotto le unità. Quindi mi avvedo che dalle 3 diecine non posso sottrarne 5, e perciò in questo, ed in ognialtro caso simile prendo una *unità* dalla cifra appresso, e qui dalle 9 centinaia, che aggiunta al 3 forma 13, e dico; 13 — 5 = 8, e pongo questo avanzo sotto le *diecine*. Così le 9 *centinaia* sono rimase 8, onde proseguo; 8 — 3 = 5, e pongo questo avanzo in fila colle *centinaia* e così opero successivamente fino all' ultima cifra a sinistra.

5785937
1498356
———
4287581
———
5785937
=======

La *riprova* di questa Operazione si fà sommando l' avanzo col numero sottratto. Se l' Operazione è esatta dee ritornare quel primo numero da cui si è tolto l' altro. E' evidente infatti che se 7 — 6 = 1 sarà viceversa 1 + 6 = 7, e così dicasi di ogni altra cifra dei numeri dati nell'esempio presente.

Qualora nel numero maggiore vi sieno diversi zeri come vedesi nell'annesso esempio, il primo zero diverrà 10 se gli si aggiunta una *unità* presa da tutto il numero, che formano gli zeri consecutivi a sinistra con la cifra appresso. Nel nostro caso, acciò si possa dire 10 — 4 = 6 conviene prendere una unita dal 500, che resterà perciò 499. Si avverta adunque in ogni caso simile che togliendo un numero di una sola cifra da altro composto di più zeri, il primo *zero* conviene farlo 10, e gli altri appresso divengono altrettanti 9: che inoltre la cifra contigua alla sinistra degli *zeri* resta diminuita di una *unità*. Con tale avvertenza si prosegua la *sottrazio-*

56015000
31571874
————
24443126
————
56015000
=========

ne al solito; ed in questo esempio si dica 9 — 7 = 2, 9 — 8 = 1, 4 — 1 = 3 ec.

11. La *Sottrazione* può eseguirsi ancora con altro metodo, che dipende dal considerare che la differenza fra due numeri, è quel numero, che dee aggiungersi al minore acciò divenga il maggiore. Debbasi Adunque in questo senso sottrarre il 5899 dal 9576.

Incominci al solito dalle unità, e dico; Dal 9 per andare al 6, non posso essendo 6 < 9, e perciò prendo una *unità* dalla cifra 7 contigua al 6, e dico: Dal 9 per andare al 16 manca 7, che pongo sotto le *unità*. Seguito dipoi dicendo; Dal 9 per andare al 16 (essendo già il 7 diminuito di *uno*) manca 7, che scrivo al suo posto. Quindi dico; dall' 8 per andare al 14 manca 6, e lo segno al suo posto; ed infine dal 5 par andare all' 8 manca 3; nel qual residuo termina l' operazione.

9576
5899
———
3677

Questo metodo è utile per intendere altre Operazioni Aritmetiche, e soprattutto per ben concepire la sottrazione Algebrica; perciò non dee trascurarsi.

MOLTIPLICA

12. In questa Operazione il numero da moltiplicarsi (cioè da sommarsi più volte dicesi *moltiplicando*; il numero che moltiplica (cioè che esprime quante volte dee sommarsi il *moltiplicando*) dicesi *moltiplicatore*; il numero resultante dalla moltiplica chiamasi *prodotto*. Il *moltiplicando*, ed il *moltiplicatore* si sogliono anche chiamare indistintamente i *fattori*.

Come nella somma, e nella sottrazione è necessario sapere a memoria le somme, e le differenze

fra i numeri di una, o di due cifre: così per eseguire la moltiplica fa d' uopo aver pronti nella mente i prodotti di due numeri comunque combinati dall' 1, fino al 9.

La tavola detta Pittagorica, che qui si riporta contiene evidentemente tutte queste combinazioni disposte con ordine facilissimo ad impararsi, ed a ritenersi in mente.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.
4.	8.	12.	16.	20.	24.	28.	32.	36.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.
6.	12.	18.	24.	30.	36.	42.	48.	54.
7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.
8.	16.	24.	32.	40.	48.	56	64.	72.
9.	18.	27.	36.	45.	54.	63.	72.	81.

Volendo sapere con questa tavola quanto fà 4X7 si guarda nella prima fila verticale delle *unità* al numero 4, e dipoi si scorre orizzontalmente fino alla settima casella indicata ancora dal N.° 7 posta nella prima fila orizzontale delle *unità*. Si troverà in questa casella settima il numero 28; dunque 4X7 = 28. Lo stesso resultamento 28 si troverebbe se si andasse alla quarta casella orizzontale posta in faccia al N.° 7 della fila verticale delle *unità*. Da questo esempio resta manifesto il metodo per trovare qualunque altro prodotto.

Si debba frattanto moltiplicare il numero 5786 per 7. Scrivo il *Moltiplicatore* sotto al *Moltiplicando*, e dipoi incominciando dalle *unità*, e proseguendo alle *diecine*, *centinaia* ec, dico;

```
 5786
    7
 ----
40502
```

7X6 = 42, segno 2, e porto 4. Quindi seguo 7X8= 56, 56 + 4 = 60; segno 0, e porto 6: quindi soggiungo; 7X7 = 49, 49 + 6 = 55; segno 5, e porto 5. Infine 7X5 = 35, 35 + 5 = 40, che segno totalmente. Dunque il prodotto 7X5786 =40502.

Allorchè i *fattori* della moltiplica sono numeri composti di più cifre l' Operazione è pressoche la stessa della precedente. Ciascuna cifra del *moltiplicatore* moltiplica tutte quelle del *moltiplicando* conforme quì sopra il 7 ha moltiplicato tutte le cifre del *moltiplicando* 5786. Bisogna peraltro avvertire che la seconda cifra del *moltiplicatore essendo diecine* darà il suo prodotto in *diecine*; la terza essendo *centinaio* lo darà in *centinaia*, la quarta essendo *migliaio* lo darà in *migliaia*, e così di seguito. Adunque per sommare convenevolmente questi diversi prodotti, onde avere il prodotto totale, converrà segnare primieramente il prodotto delle unità; dipoi segnare sotto a questo il prodotto delle *diecine* ponendo la prima cifra di queste sotto la seconda cifra del precedente; dipoi segnare il prodotto delle *centinaia* ponendo la prima cifra di questo sotto la terza del primo prodotto, e così successivamente scalare (come dicesi) una cifra ogni prodotto parziale che si pone. L' Esempio seguente spiegherà a sufficienza la regola prescritta.

moltiplicando 6596
moltiplicatore 384

26384 .. Prodotto delle *unità* 4
52768.... Prodotto delle *diecine* 8
19788.... Prodotto delle *centinaia* 3

2532864.. Prodotto totale

La *riprova* del 9 si applica felicemente a questa operazione con poca diversità da quella usata per la somma. Questa riprova consiste. 1.° Nel togliere il 9 quante volte si può dalla somma delle cifre del *moltiplicando*, e dipoi dalla somma di quelle del *moltiplicatore* notando a parte gli avanzi (se vi sono) in ciascheduna di queste somme. Così nell' esempio superiore togliendo quante volte si può il 9 dalla somma delle cifre 6596, l' avanzo è 8; togliendo similmente il 9 dalla somma delle cifre 384, l' avanzo è 6.

Secondo. Nel moltiplicare fra loro gli avanzi così ottenuti dai due fattori, e nel togliere quante volte si può il 9 dalle cifre di questo prodotto, e notare questo terzo avanzo. Così (come vedesi nell' annessa figura) avendo posto l' uno sotto l' altro gli avanzi 8, 6, il loro prodotto è 48, che segno al di sopra, e togliendo il 9 quanto si può dalla somma 8 + 4, resta l'avanzo 3, che pongo in faccia al primo avanzo 8.

48
8 | 3
6 | 3

Terzo. Nel togliere similmente il 9 quante volte si può dalle cifre sommate del prodotto totale avuto dalla moltiplica: e se l' operazione è esatta quest' ultimo avanzo dee eguagliare quello precedente che è resultato dalle cifre del prodotto dei due primi avanzi. Infatti nel nostro esempio tolto il 9 dalla

somma delle cifre 2532864 quante volte si può si ottiene l' avanzo 3, come deve essere se la moltiplica stà bene.

La *riprova* del 9 può in alcuni casi fallire. Per esempio se traspongo le cifre di un prodotto; se pongo in esso il *zero* in luogo del 9; se tralascio le cifre 9, che sono nei prodotti, ed in altri casi consimili. Questi errori però non possono quasi commettersi che a bella posta; onde è che non debbe trascurarsi l' uso di una *riprova* così spedita.

13 Nella prattica della moltiplica occorre spesso un fatto, che sembra contradire al principio raccomandato in addietro, cioè che non si possono calcolare fra loro se non se le quantità *omogenee*. Quando per esempio si abbia da calcolare il prezzo di Braccia 25 di panno a Lire 18 il braccio si dice comunemente che si moltiplicano le braccia 25 per le lire 18, e sono pure queste quantità di specie affatto diversa. Si rifletta a tal proposito che questo modo di esprimere tale operazione è falso, nè è vero già che si moltiplichino le braccia per le lire. Si prende bensì il prezzo di lire 18 *venticinque volte*; perlochè il *moltiplicatore* 25 non esprime quì la sua qualità di misura del panno, ma sivvero un numero *astratto* 25, che indica quante volte si deve sommare la sola specie dell' altra quantità data di lire 18. Adunque *la moltiplica* (o dir vogliasi *somma reiterata*) si fà di una sola specie di quantità sebbene i *fattori* talvolta ne annunzino due specie diverse. Si dee pertanto conchiudere in generale che allora quando i *fattori* sono di specie diversa il *moltiplicando* esprime la specie sua, e il *moltiplicatore* non esprime alcuna specie particolare ma diviene un *numero astratto*, che dà la norma di quante volte si dee sommare il *moltiplicando*.

14. Sebbene ottengasi di fatto lo stesso prodot-

to moltiplicando un *fattore* pell' altro, oppure moltiplicando inversamente il secondo pel primo, nonostante si affaccia a prima vista una certa difficoltà nel concepire per esempio che il 3529 sommato 384 volte debba dare lo stesso prodotto del 384 sommato 3529 volte.

Per dileguare questa, e simili difficoltà, premetto alcuni principj quasi per se medesimi evidenti.

Primo. Moltiplicare 1 per un qualunque numero (per esempio) 7 è lo stesso che moltiplicare a rovescio il 7 per 1. Infatti 1×7 significa *sette unità prese una volta*, e 7×1 significa *l' unità presa sette volte*; i quali resultamenti sono evidentemente eguali.

Secondo. Se i *fattori* della *moltiplica* hanno una sola cifra, danno lo stesso prodotto qualunque di essi facciasi *moltiplicatore*. Sieno i *fattori* 5, 9: faccio il maggiore $9 = 5+1+1+1+1$. Adunque 5×9 sarà lo stesso che $5\,(5+1+1+1+1) = 25+5+5+5+5$, ed all' incontro 9×5 sarà lo stesso chè $(5+1+1+1+1)\,5 = 25+5+5+5+5$. Essendo *identici* (cioè i medesimi) questi resultamenti è chiaro che 5×9 ovvero 9×5 debbono dare lo stesso prodotto $45 = 25+5+5+5+5$

Terzo. Il N.° 100 può essere espresso per $10 \times 10 = 10^2$; il 1000 per $10 \times 10 \times 10 = 10^3$; il 10000 per 10^4, il 100000 per 10^5 ec. (7). È manifesto ancora che $10^2 \times 10^5 = 10^7$; giacchè $10^2 \times 10^5$ significa 10×10 moltiplicato per $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$, il che produce evidentemente $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$. Nel modo stesso si conoscerebbe che $10^3 \times 10^6 = 10^9$, ed in generale che per moltiplicare lo stesso numero 10 affetto da due qualunque *esponenti delle sue poten-*

se, basta porre per *esponente* sul 10 la somma di questi *esponenti*.

Premesso tutto ciò si potrà agevolmente dimostrare *che è indifferente il prendere per moltiplicatore qualunque dei due fattori numerici;* e che per esempio 3529×384 dee dare lo stesso prodotto che 384×3529.

Questi due *fattori*, come qualunque altro numero composto, potranno sempre essere sciolti nelle sue *unità, diecine, centinaia* ec. in questa forma. Invece di 3529 si può scrivere $3.\ 10^3 + 5.\ 10^2 + 2.\ 10 + 9$; invece di 384 può scriversi $3.\ 10^2 + 8.\ 10 + 4$. Le due diverse moltipliche si imposteranno adunque così;

Moltiplicando ... $3.\ 10^3 + 5.\ 10^2 + 2.10 + 9$

Moltiplicatore ... $3.\ 10^2 + 8.\ 10 + 4$

Prodotti

per $3.10^2 .. 9.10^5 + 15.10^4 + 6.10^3 + 27.10^2$

per $8.10 \ldots\ldots + 24.10^4 + 40.10^3 + 16.10^2 + 72.10$

per $4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 12.10^3 + 20.10^2 + 8.10 + 36$

Totale ... $9.\ 10^5 + 39.10^4 + 58.10^3 + 63.10^2 + 80.10 + 36$

E ponendo il *Moltiplicatore* nel luogo del *Moltiplicando*, e viceversa, l' operazione procederà come segue.

Moltiplicando ... $3.\ 10^2 + 8.\ 10 + 4$

Moltiplicatore ... $3.\ 10^3 + 5.\ 10^2 + 2.\ 10 + 9$

Prodotti

per $3.\ 10^3 \ldots 9.\ 10^5 + 24.\ 10^4 + 12.\ 10^3$

per $5.\ 10^2 \ldots\ldots + 15.\ 10^4 + 40.\ 10^3 + 20.\ 10^2$

per $2.\ 10 \ldots\ldots\ldots\ldots + 6.\ 10^3 + 16.\ 10^2 + 8.\ 10$

per $9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 27.\ 10^2 + 72.\ 10 + 36$

Totale ... $9.\ 10^5 + 39.\ 10^4 + 58.\ 10^3 + 63.\ 10^2 + 80.\ 10 + 36$

La semplice ispezione del processo delle due operazioni dichiara abbastanza che i prodotti totali debbono essere *identici*; e siccome questo istesso processo può applicarsi a due qualunque fattori numerici, *l' identità* dei prodotti resta così universalmente dimostrata. Se vogliasi poi ridurre ad un solo numero composto il prodotto totale delle due moltipliche fatte qui sopra, è visibile che sarà;

$9.\ 10^5 = 900000$

$39.\ 10^4 = 390000$

$58.\ 10^3 = \ldots 58000$

$63 \cdot 10 = \ldots 6300$

$80.\ 10 = \ldots 800$

36

Totale 1355136

Facendo la moltiplica col sistema ordinario avremo come segue.

3529	6
384	1 | 6
	6 | 6
14116	
28232	
10587	
Totale 1355136	

Il metodo tenuto per la precedente dimostrazio-

ne è un tenue saggio del valore del linguaggio Matematico. Nel calcolo aritmetico ordinario le diverse specie di quantità, cioè le *unità*, le *diecine ec.* vengono per natura loro ad unirsi, e mescolarsi in modo, che poca o niuna traccia apparisce dei passi fatti dal calcolo medesimo. Al contrario nel calcolo eseguito con i segni Algebrici se ne vede minutamente ogni passo, e se ne può in conseguenza analizzare lo spirito, e conoscerne la verità, e l' estensione.

DIVISIONE

15. In questa Operazione, già definita (5), il numero che divide dicesi *divisore*; quello da dividersi dicesi *dividendo*, ed il numero resultante dalla divisione dicesi *quoto*, ovvero *quoziente*. Se il *quoto* è composto di più cifre, ciascuna sua cifra dicesi *quoto parziale*, perche (come vedremo) ciascuna di queste cifre esprime il *quoto* preso ad ogni passo dell' Operazione.

Per eseguire la divisione è indispensabile il sapere a memoria tutti *i quoti parziali*, che nascono dalla divisione di un numero di due cifre per altro numero di una sola cifra. La tavola Pittagorica (12) comprende tutti questi *quoti* con ordine facilissimo ad apprendersi. Volendo per esempio sapere quante volte il 6 stà nel 57 si vada alla colonna verticale dei numeri 1, 2, 3 ec. e si scenda fino al 6; dipoi si scorrà orizzontalmente la fila dei prodotti per 6: Si esamini quale è fra questi il prossimo minore di 57, e si troverà il 54 minore di 3 del 57. Infine la fila orizzontale delle *unità* mostra sopra il 54 il 9, e da ciò si concluderà che il 6 stà nel 57 *nove volte*, e avanza 3.

Si può ancora operare all' opposto. Presa cioè la casella del 6 nella fila orizzontale dei numeri 1, 2, 3 ec.

si scenda verticalmente fino a trovare il 54 numero prossimo minore di 57, ed in faccia al 54 nella fila verticale delle *unità* si troverà il 9, come sopra.

16. Quando il divisore è numero di una sola cifra, la *Divisione* dicesi *semplice*. Questa operazione si imposta scrivendo il *divisore* alla sinistra del *dividendo*, e sotto a questo il *quoto*.

Debbasi pertanto dividere per 3. il 2235784. Essendo il divisore di una cifra sola, *i quoti parziali* non comprenderanno che due cifre al più del *dividendo*, Si dirà adunqne;

Il 3 nel 22 stà 7 volte coll' avanzo 1. Il *quoto* 7 si porrà sotto al 22, e l' avanzo 1 si unirà alla cifra 3, che segue dopo 22 nel dividendo, e si dirà; $\frac{13}{3} = 4$ coll' avanzo 1, da unirsi al 5; e posto al suo luogo il *quoto* proseguo: Il 3 nel 15 stà 5 volte senza avanzo; pongo nel quoto il 5, e prosegno; il 3 nel 7 stà due volte coll'avanzo 1 da unirsi all' 8 Segno il quoto 2, e continuo; il 3 nel 18 stà 6 volte senza avanzo, ed infine il 3 nel 4 stà, una volta coll' avanzo 1

$$\begin{array}{l|l} 3 & 2235784 \\ \hline & 745261.\frac{1}{3} \end{array}$$

Questo ultimo avanzo 1, in cui termina la divisione deve pure dividersi per 3, e dovendo naturalmente l' avanzo essere minore del divisore, la divisione non può eseguirsi. Perciò si accenna scrivendo, come si sà (7) in questa forma $.\frac{1}{3}$. Le divisioni così accennate danno origine ad una speciale classe di numeri detti *frazioni*, ovvero *Rotti*, di cui tratteremo in seguito a parte.

17 Quando il *Divisore* ha più cifre la *Divisione* dicesi *Maggiore*. In questa non è facile come nel-

la *Divisione semplice* il conoscere *i quoti parziali*, e gli avanzi che da loro successivamente risultano. Adunque il metodo più naturale per la *Divisione maggiore* è quello di segnare a parte tutti i prodotti del divisore per 1, per 2, per 3 ec. fino al 9, e dipoi operare presso a poco come nella *Divisione semplice*. Sia per esempio da dividersi per 3928 il 96526526. Preparo primieramente le moltipliche del *Divisore* 3928 per 1, per 2, per 3 ec, scrivendo questi *moltiplicatori* di faccia ai respettivi prodotti, come qui si vede.

1.—	3928
2.—	7856
3.—	11784
4.—	15712
5.—	19640
6.—	23568
7.—	27496
8.—	31424
9.—	35352

Dipoi scrivo il *divisore* a sinistra del *dividendo* come nel passato esempio, ma qui si pone il *quoto* sotto al *Divisore*.

Incomincio dall' esaminare quante cifre del *dividendo* possono contenere tutte quelle del *divisore*, e trovo che le prime quattro 9652 possono contenerlo. Segno un punto sovra la cifra 2, e dico: Il 3928 nel 9652 stà due volte, giacchè nella fila dei prodotti del 3928 il prossimo minore al 9652 è il 7856. Pongo perciò il 2 come primo *quoto parziale*, ed il prodotto 7856 lo pongo sotto al 9652. Fatta la sottrazione ottengo il resto 1796; perlochè argomento che $\frac{9652}{3928} = 2$ coll' avanzo 1796.

Accanto a questo avanzo scrivo la cifra 6 successiva al 2 nel *dividendo*, e guardando trà i prodotti di 3928, argomento similmente che il 3928 nel

17966 non entra più di 4 volte, e segno 4 nel *quoto*; sottraggo dal 17966 il prodotto 15712, cioè 4×3928, ed ottengo l' avanzo 2254, accanto al quale abbasso la cifra 5 del *dividendo* successiva al 6. Proseguo nel modo istesso l' operazione fino all' ultima cifra 6 del *dividendo*, e ne concludo che il 3928 stà nel 96526526 un numero di volte 24573 coll' avanzo 3782, che pure debbe essere diviso per 3928. Perciò il *quoto totale* di questa *Divisione* sarà $24573.\frac{3782}{3928}$

Divisore 3928]		96526526	*Dividendo*
		7856	
Quoto	24573. $\frac{3782}{3928}$	17966	
		15712	
		22545	
		19640	
		29052	
		27496	
		15566	
		11784	
		3782	

18. Con un poco di attenzione che si faccia nel metodo esposto per la *Divisione maggiore* si potrà conoscere che i *quoti parziali* dipendono dal confronto della grandezza delle cifre del *divisore* con quella delle cifre del *dividendo*, come ancora che la moltiplica del *quoto parziale* pel *divisore* dimostra la verità di questo istesso *quoto*.

Infatti per investigare quante volte il 37 stà nel 194

(escluso il fatto delle moltipliche di 37 per 1, 2, 3 ec.) basta confrontare la prima cifra 3 del *divisore* con le prime due 19 del *dividendo*, e si vede che il *quoto* sarebbe 6 coll'avanzo 1: ma questo avanzo unito al 4 dà 14, che non contiène 6 volte l'altra cifra 7 del *divisore*. Argomento adunque di quì che tutto il *divisore* 37 non può entrare

Divisore 37 *Dividendo* 194
Quoto 5. $\frac{9}{37}$ 185
9

6 volte nel 194, e perciò pongo il *quoto* 5. Infatti 5×37 = 185 numero minore di 194, che sottratto dallo stesso 194 dà l'avanzo 9, e perciò il *quoto* totale di $\frac{194}{37}$ sarà $5\frac{9}{37}$. Ecco pertanto un altro metodo di eseguire la *divisione* senza le previe moltipliche del *divisore* per 1, 2, 3 ec. La moltiplica dei *quoti parziali* pel *divisore* è una *riprova* evidente della giustezza di questi *quoti*; perchè se questi dassero un prodotto maggiore del numero con cui il *divisore* si è confrontato, il *quoto* dovrebbe diminuirsi; se al contrario dassero un prodotto tanto minore che l'avanzo superasse il *quoto parziale*, è chiaro che questo *quoto* dovrebbe accrescersi.

Se inoltre in questo metodo di *Divisione* si adopra la *Sottrazione* nel secondo modo insegnato (11), può farsi a meno di scrivere il prodotto del *quoto* pel *divisore* sotto le cifre del *Dividendo*; e si eseguirà a mente questa *Sottrazione* notando subbito l'avanzo. Volendo così dividere il 425 per 29 si dirà il 29 nel 42 stà una volta: segno il *quoto* 1, e dipoi dico; 1×9 fà 9, e per andare al 12 manca 3: quindi soggiungo; 1×2 fà 2, ed 1 che porto per le *diecina* del 12 fà 3. Per andare dal 3 al 4 manca 1, dunque il 29 stà in 42 una volta coll'avanzo 13. Abbasso al solito la susseguente cifra 5 del *dividendo* accanto

29 425
—— 135
14. 19 19
29

all' avanzo 13, e proseguo dicendo; il 29 nel 135 parrebbe dovere stare come il 2 nel 13; cioè 6 volte coll' avanzo 1, che unito al 5, fà 15. Ma il 9 nel 15 non stà 6 volte; dunque tutto il 29 non può stare 6 volte nel 15. Diminuisco perciò il *quoto* 6 fino a 4, che pongo per secondo *quoto parziale*, indi soggiungo: $4 \times 9 = 36$, e per andare a 45 manca 9, che segno in avanzo sotto la *unità* del 135. Dipoi proseguo: $2 \times 4 = 8$, e 4 che porto per le quattro *diecine* del 45 fà 12. Dal 12 al 13 la differenza è 1, che segno in avanzo sotto le *diecine* del 135. Non essendovi nel *dividendo* altra cifra da abbassare accanto all' avanzo 19, conchiudo, che il 29 stà nel 425 14 volte, e $\frac{19}{29}$

Questo metodo per la *Divisione maggiore* è il più breve di quanti se ne conosca, e perciò fà di mestieri il renderselo familiare. Si noti inoltre che essendo il 9 il massimo numero di una cifra sola, è evidente che i *quoti parziali* non potranno mai superare il 9, qualora il *divisore* sia bene confrontato colle cifre del *dividendo*. Se adunque succeda che sembri che il *Divisore* stia *più di nove volte* nelle cifre del *dividendo*, sulle quali o si incomincia, o si prosegue l' Operazione, si dee concludere che l' Operazione è sbagliata, e se ne deve cercare l'errore.

19. Frequentemente la *Divisione* ha per oggetto il fare tante parti eguali del *dividendo* quante *unità* sono nel *Divisore*. Questo oggetto è pure incluso nella spiegazione già data di questa Operazione (5); poiche è generalmente vero che forma tante parti eguali del *Dividendo* quel numero, che ne può essere altrettante volte sottratto. Così se il 7 può essere sottratto otto volte dal 56, è chiaro che il 7 è l' ottava parte di 56.

Considerando ancora che il *Dividendo* si compone col prodotto, del *Divisore* pel *quoto*, ed essendo dimostrato (14) che è indifferente prendere per *moltiplicatore* o l' uno, o l' altro, se per tale si prenda il *divisore*, resta manifesto che il *Dividendo* risulterà da tante volte il *quoto*, quante sono le *unità* del *Divisore*; dunque il *Dividendo conterrà tante parti eguali al quoto quante sono le unità del Divisore*. Risulta ancora da tali considerazioni che se il *quoto si cangia nel Divisore, il nuovo quoto sarà questo istesso Divisore*.

Quando la Divisione ha per oggetto l' investigare quante volte il *Dividendo* può capire il *Divisore*, *il quoto*, che esprime questo numero di volte è *un numero astratto*, ed il *Dividendo*, ed il *divisore* sono *omogenei*. Sia per esempio il *Quesito*: Una fonte contiene 2500 Barili d' acqua, quante volte converrà attingervi con un vaso di 5 Barili per vuotarla? Qui il *Divisore* è 5, il *Dividendo* è 2500 *omogenei* ambedue perche l'uno, e l'altro esprimono Barili di acqua. Il *quoto* altresì, che è 500 *volte*, è evidentemente un numero *astratto*. Allorchè poi la *divisione* si adopera per fare tante parti eguali di un dato numero, il *divisore* che indica quel numero di parti eguali è *astratto*, ed il *quoto* che è la parte eguale ricercata del *Dividendo* è *omogeneo* con esso. Così se si domandi quanto costa una libbra di tabacco, essendoche libbre 5 sieno costate Lire 30, è manifesto che converrà fare 5 parti eguali del prezzo 30 per avere il prezzo di una libbra. Perciò il *Divisore* 5 è in questo caso un numero *astratto*, ed il *quoto* Lire 6 è *omogeneo* col *Dividendo* Lire 30.

Sebbene *la riprova diretta* della *Divisione* sia il vedere se il prodotto del *quoto* pel *divisore* unito all' avanzo ultimo ridoni il *dividendo*, può non os-

tante adoprarsi la *riprova* del 9 in questo modo. Si tolgano tutti i 9 al solito dalla somma delle cifre del *divisore*, e dipoi da quella delle cifre del *quoto*. Si notino gli avanzi ottenuti respettivamente, e si moltiplichino fra loro. A questo prodotto aggiungasi l'ultimo avanzo della *divisione*, e da questa somma tolgansi ancora tutti i 9 notando l'avanzo se vi è. Quest' ultimo avanzo, qualora l'Operazione sia esatta, deve eguagliare l' avanzo che si ottiene sottraendo tutti i 9 dalla somma delle cifre del *dividendo*. Nell' ultima *divisione* fatta di sopra, il *divisore* era 29, il *dividendo* 425, il *quoto* 14 coll' avanzo ultimo 19. Per applicarvi la riprova del 9, lo tolgo dal 29, e dal 14, ed ottengo gli avanzi 2, 5, che segno come vedesi nell' annessa figura.

	29
2	2
5	2

Moltiplico fra loro questi avanzi, ed al prodotto 10 aggiungo l' avanzo 19. Così ottengo 29, dalle di cui cifre tolto il 9 resta 2, che segno al suo posto. Infine tolti i 9 dalle cifre 425 del *dividendo* ho lo stesso avanzo 2, e ne concludo che l' Operazione stà bene.

20. Veniamo adesso alla dimostrazione di tutte le *riprove* del 9 usate fin qui con poca diversità nella *Somma*, nella *moltiplica*, e nella *divisione*. Agevolmente si intende che dividendo per lo stesso numero i numeri proposti per farne la *Somma*, e dipoi la *Somma* medesima, si avrà con la prima divisione una *Somma* di quoti, e di avanzi, che eguaglierà il quoto, e l' avanzo ottenuto dalla seconda divisione, qualora la *Somma* sia stata eseguita esattamente E' visibile infatti che se $13+16+18=47$, preso a caso un *divisore qualunque*, per esempio 7, sarà.

$$\frac{13}{7} + \frac{16}{7} + \frac{18}{7} = \frac{47}{7}$$

Ed in vero i primi tre *quoti* sono 1 $\frac{6}{7}$ + 2 $\frac{2}{7}$ + 2 $\frac{4}{7}$ = 5 $\frac{12}{7}$ = 6 $\frac{5}{7}$. Ed egualmente $\frac{47}{7}$ = 6 $\frac{5}{7}$. Si osservi inoltre che l' esattezza della somma 13+16 +18 = 47 non tanto si rileva dallo stesso *quoto* 6, quanto dallo stesso avanzo 5.

Ma una tale *riprova* fatta con qualunque *divisore* sarebbe certamente lunga, e laboriosa, se non scegliessimo il *divisore* 9, che ha la proprietà di dare prontamente lo stesso resto se invece di dividere si tolga quante volte si può dalla *somma* delle cifre del *dividendo*. Per esempio $\frac{154}{9}$ = 17 coll' avanzo 1, e parimente 1 + 5 + 4 = 9 = 1. E perchè chiaramente si conosca questa proprietà del 9 si rifletta in primo luogo che i numeri 10, 100, 1000, 10000 ec. divisi per 9 debbono dare tutti lo stesso avanzo 1, essendoche 10 = 9 + 1, 100 = 99+ 1, 1000 = 999+1, 10000 = 9999+1 ec. Si rifletta in secondo luogo che se n, n', n'', n''', n^{IV} ec. sono le cifre d'un numero incominciando dalle *unità*, il numero è espresso con questa serie di termini $n + 10n' + 100n'' + 1000n''' + 10000n^{IV} +$ ec. Dopo tali riflessioni rimane manifesto che essendo

$$\frac{n + 10n' + 100n'' + 1000n''' + 10000n^{IV} + \text{ec.}}{9}$$

$$= \frac{n}{9} + \frac{10n'}{9} + \frac{100n''}{9} + \frac{1000n'''}{9} + \frac{10000n^{IV}}{9} + \text{ec.},$$

e non potendo le cifre n, n', n'', n''', n^{iv} ec. essere maggiori di 9, gli avanzi di queste divisioni parziali o saranno zero nel caso che qualcuna cifra sia 9, ovvero saranno $n + n' + n'' + n''' + n^{iv} +$ ec, cioè la somma delle medesime cifre componenti il numero. Togliendo adunque il 9 da questa somma quante volte è possibile resterà lo stesso avanzo, che si avrebbe dalla *Divisione*

$$\frac{n + 10\,n + 100\,n'' + 1000\,n''' + 10000\,n^{iv} + \text{ec.}}{9}$$

Pertanto colla *prova* del 9 usata per la somma (9) si ottiene l' avanzo della *Divisione* per 9 di questa somma, e quello della divisione per 9 di tutti i numeri che la compongono. Laonde si conchiude che se questi avanzi sono gli stessi, l' Operazione deve star bene.

Riguardo alla *riprova* della *Moltiplica* (12) si consideri che se due *fattori* compongono un prodotto, come 14×19 produce 266, sarà $\frac{14 \times 19}{9} = \frac{266}{9}$. Ma $\frac{14}{9}$ dà l' avanzo 5, e $\frac{19}{9}$ dà l' avanzo 1; dunque $\frac{14 \times 19}{9}$ deve dare l' avanzo $5 \times 1 = 5$; e tanto debbe essere l' avanzo di $\frac{266}{9}$ se l' Operazione è fatta bene.

Finalmente quanto alla *riprova* della *Divisione* usata di sopra, siccome il *Dividendo* si ricompone col prodotto del *quoto*, e del *Divisore* unitovi l' ultimo avanzo, se colla sottrazione del 9 da questo prodotto ed avanzo si avrà lo stesso resto che risulta sottraendo il 9 dalle cifre del *Dividendo*, la

Divisione proposta sarà eseguita esattamente.

CAP. II.
Algoritmo delle frazioni

21. Abbiamo già detto (16) essere le *frazioni* (dette anche *rotti*) altrettante divisioni accennate, in cui il numero sopra la linea intermedia è il *Dividendo*, l' altro posto al di sotto è il *Divisore*. Così $\frac{6}{13}$ indica che il 6 dee dividersi per 13. Questa *Divisione* può per altro effettuarsi di fatto se concepiremo l' *unità* divisa in tante parti, quante *unità* contiene il *divisore*, e se dipoi prenderemo tante di queste parti, quante unità sono nel *Dividendo*. Immaginando per esempio l' unità divisa in 13 parti eguali, la frazione $\frac{6}{13}$, ossia $6 \times \frac{1}{13}$ si pone ad effetto prendendo 6 delle parti *tredicesime* in cui è divisa l' unità. In questo significato la frazione $\frac{6}{13}$ si pronunzia *sei tredicesimi*, ed è facile apprendere il modo analogo di pronunziare qualunque altra *frazione*. Allorchè la *frazione* si annunzia nella precedente maniera il *Dividendo* passa ad avere il nome di numeratore perchè numera le parti eguali in cui è stata divisa l' *unità*; ed il *Divisore* si chiama *Denominatore*, perche dà il nome a queste parti. Tanto il *Numeratore* che il *Denominatore* si chiamano ancora con un solo comune vocabolo *i termini del rotto*.

22. Un *rotto* dicesi *proprio* quando il *numeratore* è minore del *Denominatore* perchè in questo caso il valore del *rotto* è minore dell' *unità*. Dicesi all' opposto *rotto improprio* ovvero *spurio*, quando

il *numeratore* è più grande del *denominatore*; ed è perciò il *rotto* maggiore dell' *unità*. Infine allorchè il *numeratore* eguaglia il *denominatore*, il rotto è sempre eguale all' unità; poiche qualunque numero stà in se stesso una volta. Così $\frac{5}{7}$ è un *rotto proprio*; $\frac{15}{8}$ è un rotto improprio che riducesi ad $1+\frac{7}{8}$.

E' visibile inoltre che $\frac{9}{9}$, $\frac{11}{11}$, $\frac{31}{31}$, e simili *frazioni* sono tutte eguali all' unità.

23. Un *rotto* cresce, o scema se cresce o scema il suo *numeratore*. Ed all' opposto cresce il *rotto* se scema il *denominatore*, e scema se cresce il *denominatore*. È evidente infatti riguardo al *numeratore* che $\frac{5}{8}$ crescono se divengono $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{8}$ ec., e scemano se divengano $\frac{4}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{1}{8}$. E rispetto al *denominatore* il medesimo *rotto* $\frac{5}{8}$ cresce se divenga

$\frac{5}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{5}{4}$ ec., e scema se divenga $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{5}{11}$ ec.

24. Se ambedue i *termini del rotto* si moltiplichino, come ancora se si dividano per lo stesso numero il *rotto* non cangia valore. Infatti moltiplicando per un qualunque numero n il *numeratore* di una *frazione* essa diviene n volte maggiore: moltiplicando per n il *denominatore* essa diviene n volte minore. Dunque, moltiplicando ad un tempo per n ambedue i *termini del rotto* tanto crescerà la *frazione* per l' uno, quanto *scemerà* per l' altro, cioè le rimarrrà lo stesso valore. Lo stesso raziocinio dimostra che dividendo per n ambedue i *termini* della *frazione* rimane pur sempre lo stesso il di lei valore: esistono adunque infiniti *rotti* del valore me-

desimo; quantunque espressi in *termini* differenti.

25. Dal precedente principio nasce quasi tutta la teorica delle Operazioni sù i *rotti*, e primieramente *lo schisare i rotti*, cioè *ridurli a più semplice espressione*, e l' altra *di ridurre più rotti allo stesso denominatore*.

La prima di queste Operazioni si eseguisce *dividendo finchè si può ambedue i termini del rotto per un istesso numero che gli divida senza avanzo*. Se questo tale *divisore* non vi è, *il rotto non è schisabile*. Così $\frac{180}{360}$ diviene $\frac{18}{36}$ dividendo i suoi termini per 10; ed in seguito $\frac{18}{36}$ diviene $\frac{1}{2}$ dividendo i suoi *termini* per 18. Adunque (24) $\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$. Ma se fosse proposta a *schisarsi* la *frazione* $\frac{17}{125}$, siccome i suoi *termini* non hanno un *divisore comune senza resto*, la *schisatura* non può eseguirsi.

Il numero che divide esattamente senza resto un altro numero si dice *submultiplo* di questo, e viceversa questo si dice *multiplo* del primo. Così il 6 è *submultiplo* di 24, e viceversa 24 è *multiplo* di 6. Se un numero non ha altri *submultipli* che se medesimo, e l' unità, dicesi *Numero primo*: Se poi due numeri non hanno un *submultiplo comune* diconsi *contro se primi*, ed anche *primi fra loro*. Tali sono tutti quelli, che formano i termini dei *rotti* non *schisabili*.

I submultipli dei *termini* dei *rotti* per l' oggetto di *schisarli* si trovano per mezzo di alcune proprietà dei numeri, di cui ecco le principali.

Prima. Ogni numero che termina in cifra pari è *multiplo* di 2.

Seconda. Ogni numero che termina in *zero* è *multiplo* di 10, ed in conseguenza di 2, e di 5.

Terza. Ogni numero che termina in 5 è *multiplo* di 5.

Quarta. Ogni numero tale, che la somma delle sue cifre sia *multipla* di 3, anche il numero sarà *multiplo* di 3

Imperocchè poste n, n', n'', n''', ec. le cifre del proposto numero incominciando dalle *unità*, esso potrà essere rappresentato in tal forma (20).

$$n+n'(9+1)+n''(99+1)+n'''(999+1)+\text{ec.}$$

Ma $9n'$, $99n''$, $999n'''$ ec sono tutti *multipli* di 3; dunque se il rimanente di questo numero, cioè la somma delle sue cifre $n+n'+n''+n'''$ ec. sarà *multipla* di 3 è evidente che tutto il numero sarà *multiplo* di 3. Apparisce ancora di qui che se il numero con tale condizione sarà pari, *multiplo* di 2, e di 3, cioè anche di 6.

Quinta. Se un numero è tale, che tolto il 9 quante volte si può dalla somma delle sue cifre non vi sia avanzo, questo numero è *multiplo* del 9 (20)

Sesta. Un numero è *multiplo* di 11 allorquando le sue cifre sommate alternativamente, cioè la prima, la terza, la quinta ec, e dipoi la seconda la quarta, la sesta, ec. formano due somme eguali, ovvero che differiscano di un *multiplo* di 11.

Per dimostrare questo teorema conviene premettere che il numero 11 è *submultiplo* dei numeri 99, 9999, 999999 ec, cioè di tutti quelli composti da un nnmero pari di cifre 9. Ed è parimente l' 11 *submultiplo* dei numeri 9+2, 999+2 9999+2 ec: giacchè è visibile che essendo qui le cifre 9 in numero dispari, la divisione di queste

per 11 darà l' avanzo 9, che unito al 2 forma 11, e così ognuno di tali numeri diviene *multiplo* dell' 11. Ciò premesso, e chiamate n, n', n'', ec le cifre di un numero, esso potrà rappresentarsi sempre nella forma segnata di sopra, e quindi potrà ridursi nella forma seguente.

$$n + 9n' \quad + n' + 99n''$$

$$n'' + 999n''' \quad + n''' + 9999\overset{\text{IV}}{n}$$

$$\overset{\text{IV}}{n} + 99999\overset{\text{V}}{n} \quad + \overset{\text{V}}{n} + 999999\overset{\text{VI}}{n}$$

$$\overset{\text{VI}}{n} + 9999999\overset{\text{VII}}{n} \quad + \overset{\text{VII}}{n} + 99999999\overset{\text{VIII}}{n}$$

$$+ \overset{\text{VIII}}{n} + \text{ec.}$$

L'ultima colonna a destra di questi numeri componenti il numero proposto è visibilmente *multipla* di 11. Se adunque si avrà $n + n'' + \overset{\text{IV}}{n} + \overset{\text{VI}}{n} + \overset{\text{VIII}}{n} = n' + n''' + n + \overset{\text{VII}}{n}$; ovvero (chiamato m un numero qualunque) se sarà $n + n'' + \overset{\text{IV}}{n} + \overset{\text{VIII}}{n} = n' + n''' + \overset{\text{V}}{n} + \overset{\text{VII}}{n} = 11\,m$, il rimanente del proposto numero sarà nel primo caso;

$$+ n' \ (9 + 2)$$
$$+ n''' \ (999 + 2)$$
$$+ \overset{\text{V}}{n} \ (99999 + 2)$$
$$+ \overset{\text{VI}}{n} \ (9999999 + 2)$$

E nel secondo caso si dovrà soltanto aggiungere a questa colonna di numeri il numero $= 11\,m$. Perciò in ambedue i casi questa porzione del numero proposto sarà evidentemente *multipla* dell' 11 ed in conseguenza lo sarà ancora il numero totale.

Prendiamo per esempio a *schisare* la frazione

$$\frac{578512}{9748343}$$

Siccome $5+8+1=14=7+5+2$, e parimente $9+4+3+3=19=7+8+4$, i termini di questa frazione sono *multipli* di 11; ed infatti, dividendo ambedue per 11, essa diviene $\frac{52592}{880213}$

Debbasi ancora schisare il *rotto* $\frac{918093}{71829915}$

Abbiamo $9+8+9-3-1=22$ *multiplo* di 11; e parimente abbiamo $7+8+9+9+5-1-2-1-1=33$ *multiplo* di 11; adunque il proposto rotto sarà *schisabile* per 11; ed infatti divisi i suoi termini per 11, esso diventa $\frac{83463}{65299265}$

Ma il metodo più diretto e sicuro per *schisare* le *frazioni* è quello *di cercare il massimo submultiplo comune ai suoi termini*, ed a questo investigamento si procede nel modo seguente.

Sia la *frazione* $\frac{945}{5824}$ Il massimo numero che possa dividere i suoi *termini* è chiaramente il *numeratore* 945; ma esso non è *submultiplo* del *Denominatore* 5824; giacchè colla *divisione* trovo $5824=6\times945+154$; dunque il 945 non è il *massimo comune submultiplo*. Scrivo nuovamente la proposta *frazione* in questa forma $\frac{945}{6\times945+154}$, ed osservo che se il 154 fosse *submultiplo* di 945, sarebbe esso il massimo comune ricercato. Trovo peraltro $945=154\times6+21$; dunque neppure il 154 è il massimo *submultiplo*. Ripiglio per tanto la proposta frazione dandole questa altra forma $\frac{154\times6+21}{6(154\times6+21)+154}$, e proseguo a considerare che se il 21 fosse *submultiplo* di 154 sarebbe esso il massimo ricercato. Ma $154=$

$7 \times 21 + 7$; perciò pongo la frazione sotto questa nuova forma; $\frac{6(7.21+7)+21}{6(6.7.21+6.7+21)+7.21+7}$

In questa il 7 è *submultiplo* di 21; dunque 7 è il massimo comune *submultiplo* dei termini della proposta *frazione*; e la riduco infatti schisandola per 7 a $\frac{6(21+1)+3}{6(6.21+6+3)+21+1} = \frac{135}{832}$

Da questo esempio si impara che la ricerca del *massimo submultiplo* comune ai *termini* di una *frazione* si riduce nella pratica alla *divisione* del *denominatore* pel *numeratore*. Dipoi, se vi è avanzo questo divide il *numeratore*. Così si prosegue a dividere ogni *divisore* successivo pel successivo avanzo, finchè si trovi un avanzo *submultiplo* del previo *divisore*. Questo avanzo è il massimo *submultiplo* ricercato, e perciò se tale avanzo sarà 1, la frazione non sarà schisabile.

Quanto all' altra Operazione, di *ridurre più rotti allo stesso denominatore*, essa consiste nei *moltiplicare i termini di ciascun rotto* per *i denominatori di tutti gli altri rotti*. Così ognuno di essi avrà lo stesso *denominatore*, e non cangerà il proprio valore (24). Sieno i rotti $\frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{6}{11}, \frac{2}{9}$ da ridursi allo stesso *denominatore*.

Moltiplico i termini del rotto $\frac{5}{7}$ per 4. 11. 9, ed ho $\frac{5}{7} = \frac{5.4.11.9}{7.4.11.9} = \frac{1980}{2772}$

Moltiplico i termini del rotto $\frac{3}{4}$ per 7. 11. 9, ed ho $\frac{3}{4} = \frac{3.7.11.9}{4.7.11.9} = \frac{2079}{2772}$

Così faccio $\frac{6}{11} = \frac{6.\ 7.\ 4.\ 9}{11.\ 7.\ 4.\ 9} = \frac{1512}{2772}$, e $\frac{2}{9} = \frac{2.\ 11.\ 4.\ 7}{9.\ 11.\ 4.\ 7} = \frac{616}{2772}$

26. Sono spesso utili altre due Operazioni sopra *i rotti*, le quali dipendono dallo stesso principio (24).

Prima. Trasformare un intiero in un *rotto apparente*. Seconda. Riunire in un *rotto improprio un intiero con rotto*.

Si trasforma un *intiero* in un *rotto apparente*; *ponendo sotto all' intero l' unità per denominatore*; ovvero, se vogliasi che il *rotto* abbia un *dato denominatore* si moltiplica per questo *l' intiero, e l' unità sotto posta*. Per esempio il 9 potrà trasformarsi evidentemente in $\frac{9}{1}$; e se vogliasi che questo *rotto apparente* abbia *il denominatore* 13, si farà $\frac{9.\ 13}{1.\ 13} = \frac{117}{13}$

Si riunisce un *intiero con rotto in un solo rotto improprio moltiplicando il denominatore del dato rotto pell' intiero, ed aggiungendo al prodotto il numeratore*. Così $5\frac{2}{3} = \frac{3.\ 5 + 2}{3} = \frac{17}{3}$. La divisione del *numeratore pel denominatore* del *rotto improprio* che risulta, dà visibilmente la dimostrazione, e la riprova di questa Operazione.

SOMMA DELLE FRAZIONI

27. Le *Frazioni* con diverso denominatore sono quantità di specie diversa, e perciò non possono sommarsi (9): ridotte le *frazioni* allo stesso *denominatore* divengono *omogenee*, e perciò sommabili

Adunque per sommare i *rotti* conviene *ridurli allo stesso denominatore, e dipoi sommare tutti i loro numeratori, e porre sotto questa somma il denominatore comune.*

Sieno da sommarsi *i rotti* $\frac{5}{8} + \frac{7}{9}$ gli riduco (24) a $\frac{45}{72} + \frac{56}{72}$; sommo *i numeratori*, ed ottengo la ricercata somma $\frac{101}{72} = 1 + \frac{29}{72}$

Sieno ancora da sommarsi i *rotti* $\frac{6}{11} + \frac{2}{9} + \frac{4}{5}$: gli riduco allo stesso denominatore, e divengono $\frac{270 + 110 + 396}{495} = \frac{776}{495} = 1 + \frac{281}{495}$

SOTTRAZIONE DELLE FRAZIONI

28. Questa Operazione offre tre diversi casi, cioè; Sottrarre un *rotto da un intiero*, sottrar *rotto da rotto*, e sottrar *intiero con rotto ovvero un rotto semplice da intiero con rotto.*

Quando il *rotto* dee sottrarsi dall' *intiero si prenda da questo una unità, e si trasformi in un rotto apparente dello stesso denominatore del sottraendo* (26). *Dipoi si faccia al solito la sottrazione fra gli intieri, e fra i numeratori dei rotti; ed alla differenza di questi ultimi si ponga il denominatore comune.* Ecco alcuni esempj.

8.—	9.—	11.—	18.—
2 $\frac{1}{4}$	1. $\frac{5}{8}$	3. $\frac{4}{11}$	12. $\frac{2}{7}$
Differenza. 5. $\frac{3}{4}$ Dif.	7 $\frac{3}{8}$ Dif.	7 $\frac{7}{11}$ Dif.	5. $\frac{5}{7}$

Quando da un *rotto* dee sottrarsi altro *rotto* si

riducono allo stesso denominatore; dipoi dal maggior numeratore si tolga il minore, e alla differenza si sottoponga il comune denominatore.

Così $\frac{18}{19} - \frac{3}{5} = \frac{90 - 57}{95} = \frac{33}{95}$ Differenza cercata.

Quando da intiero con *rotto* dee sottrarsi un *rotto*, ovvero altro intiero con *rotto si riducano primieramente a rotto improprio gli intieri con rotto* (26); *dipoi si riducano questi rotti allo stesso denominatore, e se ne faccia la sottrazione come nel caso precedente.* Ecco alcuni esempj.

$$3\frac{1}{4} - \frac{7}{9} = \frac{13}{4} - \frac{7}{9} = \frac{117 - 28}{36} = \frac{89}{36} = 2 + \frac{17}{36}$$

$$5\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{11}{2} - \frac{8}{3} = \frac{33 - 16}{6} = \frac{17}{6} = 2 + \frac{5}{6}$$

MOLTIPLICA DELLE FRAZIONI

29. Anche questa Operazione offre gli stessi tre differenti casi della sottrazione, a ciascuno dei quali daremo la regola, che lo riguarda.

Primo Caso. Moltiplicare un intiero per un *rotto*, o viceversa.

Si moltiplichi l' intiero pel numeratore del rotto, ed il prodotto si divida pel denominatore, Così

$$8 \times \frac{5}{9} = \frac{40}{9} = 4 + \frac{4}{9}.$$

La dimostrazione di questa regola è manifesta tosto che si rifletta che un *rotto* è una divisione accennata (21), che può effettuarsi quando il *numeratore* rendasi maggiore del *denominatore*.

Secondo Caso. Moltiplicare *rotto* con *rotto*.

Si moltiplichino i numeratori fra loro, e quindi i denominatori fra loro; questi prodotti daranno una nuo-

va *frazione*, che è il prodotto ricercato. Così $\frac{5}{8} \times \frac{7}{11} = \frac{35}{88}$. Infatti moltiplicando $\frac{7}{11}$ per 5 il prodotto $\frac{35}{11}$ è otto volte maggiore di quello, che dee aversi moltiplicando per $\frac{5}{8}$. Adunque secondo la natura dei *rotti* (23) moltiplicando il *denominatore* 11 per 8 rendo il $\frac{35}{11}$ otto volte minore come dee essere ed in tal guisa il prodotto delle due proposte *frazioni* diviene giustamente $\frac{35}{88}$.

Si osservi che in tali moltipliche il prodotto è minore di ciascuno dei due *fattori*. Imperciocchè moltiplicare *rotto* con *rotto* significa prendere tante parti di un rotto quante ne annunzia il *rotto moltiplicatore*, ed in conseguenza si prende il *rotto moltiplicando* menoche una volta. Dunque siccome è indifferente prendere per *moltiplicatore* qualunque dei due *fattori* (14), il prodotto deve essere minore di ciascuno di essi.

Terzo Caso. Moltiplicare intiero con rotto per altro rotto, ovvero per altro intiero con rotto.

Si riducano a rotti improprj gl' intieri con rotto, dipoi se ne faccia il prodotto come nel caso precedente.

Debbasi per esempio moltiplicare $5\frac{1}{3} \times 15\frac{2}{7}$. Gli riduco agli improprj $\frac{16}{3} \times \frac{107}{7}$; e quindi collo stesso metodo usato pel caso antecedente ottengo $\frac{1712}{21} = 81 + \frac{11}{21}$. Prodotto ricercato.

Nel modo istesso $9\frac{3}{5} \times \frac{7}{12} = \frac{48}{5} \times \frac{7}{12} = \frac{336}{60}$ $= 5.\frac{3}{5}$. Prodotto ricercato.

DIVISIONE DELLE FRAZIONI.

30. È facile intendere che se due *rotti* hanno lo stesso *denominatore* il loro *quoto* sarà quello che resulta dalla *divisione* dei *numeratori*. Imperocchè *i denominatori* altro non fanno che dare il nome alle parti frazionarie dell' *unità* (21), e rendono eguali queste parti, se essi sono eguali. La grandezza altresì dei *rotti* così ridotti dipende unicamente dal loro *numeratore*. Perciò un *rotto* starà in altro *rotto* dello stesso *denominatore* quante volte il *numeratore* del primo stà nel *numeratore* del secondo. Per esempio $\frac{7}{8}$ in $\frac{21}{8}$ starà come il 7 nel 21, cioè tre volte; perchè lo stesso *denominatore* 8 non fà che enunciare la parte frazionaria dell' *unità*, e la *divisione* tende a ricercare quante volte sette di queste parti stanno in 21 delle parti medesime.

Premesso questo principio, resta dimostrato che *la divisione dei rotti consisterà in tutti i casi nel ridurli allo stesso denominatore; e dipoi, trascurato questo, nel dividere il nuovo numeratore del rotto dividendo pel nuovo numeratore del rotto divisore.* Si osservino i sottoposti esempi per apprendere la prattica di tale operazione in tutti i casi.

$8 : \frac{11}{12}$ è lo stesso chè $\frac{8}{1} : \frac{11}{12}$; ovvero $96 : 11$

Quoto $\frac{11}{96}$

$\frac{9}{13} : 15$ è lo stesso che $\frac{9}{13} : \frac{15}{1}$; ovvero $9 : 195$

Quoto $21 \frac{2}{3}$

$\frac{3}{5} : \frac{5}{7}$ è lo stesso che $21 : 25$

Quoto $1 . \frac{4}{21}$

$3 \frac{2}{3} : 15 \frac{1}{2}$ è lo stesso che $\frac{11}{3} : \frac{31}{2}$, ovvero $22 : 93$

Quoto $\frac{45}{22}$

Quando un *rotto* minore divide un maggiore il *quoto* è più grande di amendue. Infatti questa divisione si riduce a quella di un *numeratore* maggiore per uno minore; ed essendo essi numeri intieri, il *quoto* conterrà un intiero con *frazione*, o senza *frazione*. Sarà perciò in ogni caso maggiore dei *rotti* proposti a dividersi.

CAP. III

Algoritmo delle frazioni decimali

31. Il calcolo dei *rotti* riesce alquanto prolisso e laborioso, specialmente quando le operazioni si debbono ripetere fra molti di essi. Quindi è che i Matematici affine di semplicizzare questo calcolo hanno immaginato un metodo per trasformare qualunque *frazione* ordinaria in una serie di *numeri decimali*, la quale ha inversamente lo stesso Ordine, delle cifre dei numeri intieri. Le cifre di questi crescono dalle *unità alle diecine alle centinaia* ec. (2): le stesse cifre nella *serie decimale* immaginata

decrescono dai *decimi ai centesimi ai millesimi ec.* Per esempio le cifre del numero 257 esprimono secondo il sistema degli intieri (3) 2 *centinaja* 5 *diecine*, 7 *unità*. Se queste istesse cifre si scrivano con un *zero* avanti in tal modo 0,257, si è convenuto che esse esprimano la *serie decimale* $\frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000}$: dimodochè come nel primo sistema le citate cifre formano il numero *dugento cinquanta sette*, così nel *sistema decimale* formano la *frazione* $\frac{257}{1000}$ che è la somma dei tre *rotti* precedentemente segnati. E' manifesto che il sistema delle cifre decimali riguardo al loro respettivo valore è in tutto simile a quello degli intieri. Contando cioè dall' ultima cifra decimale a destra, e progredendo verso sinistra si vede che ogni dieci *unità* di questa formano una *unità* della cifra appresso; e quindi ogni *diecina* di quest' ultima forma un *unità* dell' altra cifra appresso, e così progressivamente. Per esempio 0, 58759, che esprime $\frac{58759}{100000}$ ha le sue cifre con questo ordine. L' ultima cifra 9 esprime l' unità dei *cento millesimi* la cifra 5 appresso ne esprime le *diecine*, la cifra 7 ne esprime le *centinaja*, e così di seguito.

Dopo ciò è facile intendere che se alla destra delle cifre *decimali* aggiungansi quanti *zeri* si voglia, la *frazione* cangerà il *denominatore* ma il suo valore rimarrà sempre lo stesso. Per esempio se alla frazione 0, 3, che esprime $\frac{3}{10}$ aggiungo *zeri* a piacimento si che ella divenga 0, 30, ovvero 0, 300 ovvero 0, 3000 ec., i rotti $\frac{30}{100}$ $\frac{300}{1000}$, $\frac{3000}{10000}$

rappresentati dalle precedenti frazioni decimali hanno diverso *denominatore*, ma ognuno si riduce al semplice valore di $\frac{3}{10}$. All' opposto rimane manifesto che da una *frazione decimale*, che termini alla destra con gli *zeri*, si potranno questi sopprimere o in parte, o tutti, senza alterare il valore della *frazione*.

Ma se alle *frazioni decimali* si aggiungono gli *zeri* a sinistra dopo la virgola che gli separa dagli interi, le *frazioni* divengono 10, 100, 1000 volte ec. più piccole secondo che gli *zeri* sono uno, due, tre ec. Infatti considerando la stessa *frazione* di sopra 0, 3; se essa diviene 0, 03 esprimerà $\frac{3}{100}$ che è dieci volte minore di $\frac{3}{10}$; se diviene 0, 003 esprimerà $\frac{3}{1000}$ che è cento volte minore di $\frac{3}{10}$; e così di seguito.

32. Vediamo adesso come dalle *frazioni* ordinarie nasca le serie delle cifre decimali, ossia come *i rotti* si possano trasformare *in frazioni decimali*. E poichè i *rotti* hanno origine dalla divisione, prendiamo per esempio a dividere il 79 per 8; Il *quoto* è $9\frac{7}{8}$. Invece di arrestare la divisione in questo rotto potremo cangiare l' avanzo 7 nella frazione impropria $\frac{70}{10}$, e diviso il 70 per 8 il *quoto* 8 esprimerà *decimi*, e l' avanzo sarà $\frac{6}{10}$ da suddividersi per 8. Riduco perciò il $\frac{6}{10}$ a $\frac{60}{100}$, e dividendo il 60 per 8 ho il quoto 7 in parti *centesime* coll' avanzo di $\frac{4}{100}$ da suddividersi ancora per 8.

Riduco infine il $\frac{4}{100}$ a $\frac{40}{1000}$, e colla divisione per 8 ottengo il quoto esatto $\frac{5}{1000}$. Con tale operazione $\frac{79}{8}$, che dava il *quoto* $9\frac{7}{8}$, darà lo stesso *quoto* espresso sotto questa diversa forma $9 + \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{000}$, ovvero riducendo i *rotti* allo stesso *denominatore*, lo stesso *quoto* sarà 9, 875.

Spesso succede che colla continua suddivisione degli avanzi ridotti in *frazioni improprie decimali* non si ottenga mai un *quoto parziale* senza avanzo. In tali casi la serie dei *decimali* si potrà prolungare indefinitamente senza che ella cessi giammai; e ciò dimostra che il *rotto ordinario* generato dalla prima divisione non è esattamemente trasformabile in *frazione decimale*. Nondimeno, *quanto più si proseguirà la divisione degli avanzi, tanto più la frazione decimale si avvicinerà al vero valore del proposto rotto ordinario.*

Sia per esempio da ridursi in *frazione decimale* il *rotto* $\frac{3}{7}$. Faccio lo stesso calcolo come qui sopra per la riduzione di $\frac{7}{8}$, ed acciò si distingua meglio che con parole il processo del calcolo, pongo la *divisione* fatta al solito con l' aggiunta di uno *zero* ad ogni avanzo.

Divisore 7

Quoto in decimali 0, 428571428571 ec.

Dividendo
3
0
50 Avanzo ridotto in *decimi*
20 Avanzo ridotto in *centesimi*
60 Avanzo ridotto in *millesimi*
40 Avanzo ridotto in *dieci millesimi*
50 Avanzo ridotto in *cento millesimi*
10 Avanzo ridotto in *milionesimi*
30 Avanzo in *dieci milionesimi*
20 Avanzo in *cento milionesimi*
60 Avanzo in *mille milionesimi*
40 Avanzo in *dieci mila milionesimi*
50 Avanzo in *cento mila milionesimi*
10 Avanzo in *bilionesimi*
ec.

Ottengo così, come vedesi, una *frazione decimale* in cui ritorna dopo le prime *sei cifre* lo stesso periodo di cifre, perche dopo il sesto avanzo ritorna il primo *dividendo* 3. Qneste tali *frazioni* si chiamano *periodiche*, ed il loro periodo continua all' infinito senza ottenere giammai un *quoto parziale* esatto. Se però voglio che questa frazione mi esprima $\frac{3}{7}$ con una differenza minore di $\frac{1}{1000}$ prendo soltanto le cifre 0, 428 cioè fino ai *millesimi*. E' evidente che le susseguenti cifre tralasciate non possono giammai eguagliare $\frac{1}{1000}$, poichè converrebbe a tale uopo che 71428571 ec. eguagliasse 100000000 ec. il che è assurdo: Così prendendo 0, 4285 non sarà questa frazione differente di $\frac{1}{10000}$ dal $\frac{3}{7}$; prendendo 0, 42857 sarà differente

meno di $\frac{1}{100000}$, prendendo 0,428571 differirà da $\frac{3}{7}$ meno di $\frac{1}{1000000}$, e così di seguito.

Nei calcoli ordinari bastano per lo più sei o sette cifre *decimali*; perciò qualora la *frazione* non termini in queste, è in uso di considerare la cifra susseguente, e se questa è maggiore di 5 si aggiunge una *unità* all' ultima cifra che si prende: se poi la cifra susseguente è minore di 5, nulla si aggiunge. Con questo mezzo nel primo caso la *frazione* cresce meno di una *mezza unità del decimale* suo *denominatore*, e nel secondo resta minore meno che la stessa *mezza unità*: Dimodochè in un lungo calcolo con *decimali*, gli *eccessi* vengono a conguagliare i *difetti*. Volendo per esempio arrestare la *frazione decimale* 0, 517839742 alla sesta cifra 9 considero che la susseguente $7 > 5$, adunque pongo 40 invece di 39, ed ho la *frazione* 0, 517840 che supera 0, 517839742 di $\frac{258}{1000000000} < \frac{1}{2000000}$. Volendo altresì arrestare la *frazione* medesima alla settima cifra 7, nulla vi aggiungo considerando che la susseguente cifra $4 < 5$. Così per le cifre 42 tralasciate la *frazione* diminuisce meno che $\frac{1}{20000000}$

Questa rapida approssimazione dei *decimali* al vero valore della quantità che rappresentano è di tanto pregio, che i Mattematici gli adoprano in tutti i loro calcoli numerici, in cui si tratta di approssimazione.

Il Periodo delle cifre decimali non sempre incomincia dalla prima cifra dopo la virgola, ma talvolta dopo alcune cifre. Per esempio $\frac{11}{12}$=0, 91666 ec.

incomincia dopo due cifre il periodo costante di una sola cifra 6. La frazione $\frac{23}{216} = 0,106491491$ incomincia il periodo di tre cifre dopo la terza cifra.

Che però le *frazioni decimali* possono distribuirsi in quattro classi. La prima comprende le *frazioni*, che hanno una serie terminata di cifre, la quale esprime completamente il valore di un *rotto*; e queste chiameremo *decimali complete*; La seconda comprende le *decimali periodiche*, il di cui periodo incomincia alla prima cifra; la terza le *decimali* il di cui periodo incomincia dopo alcune cifre; la quarta infine comprende le *decimali* che diremo *incomplete senza periodo*, composte cioè di una serie infinita di cifre che non giunge mai ad esprimere esattamente la quantità, che rappresentano. In tutte queste classi la serie delle cifre componenti la *frazione decimale* dicesi *mantissa*.

* 33. In seguito di tali nozioni proponiamoci di investigare quale deve essere una *frazione* $\frac{p}{n}$ (che suppongo ridotta ai suoi minimi termini), acciò possa risolversi in una *frazione decimale completa*

Sia r il numero delle cifre di una *frazione decimale* qualunque, e sieno queste espresse con le lettere $h^{\prime}, h^{\prime\prime}, h^{\prime\prime\prime}, \ldots h^{(r)}$, intendendo col segno (r) il numero degli apici sovrapposti ad h, che eguaglia appunto il numero r delle cifre. Sia inoltre p l'avanzo

* Le dimostrazioni contenute in questo paragrafo 33, e nei tre susseguenti 34, 35, 36 sono state qui esposte perchè l'ordine delle materie il richiedeva, ma non si potranno bene intendere dagli Studiosi prima che Essi abbiano percorso il susseguente Cap. IV.

ultimo dopo *il quoto parziale* $h^{(r)}$ della divisione che si fà per svolgere $\frac{p}{n}$ *in frazione decimale* (32).

Facendo alquanto di riflessione sul metodo che si tiene per tale svolgimento, apparirà manifesto che in generale sarà;

$$\frac{p}{n} = \frac{h'}{10} + \frac{h''}{10^2} + \frac{h'''}{10^3} \ldots + \frac{h^{(r)}}{10^r} + \frac{p^{(r)}}{n.10^r}$$

Ma nel caso della *decimale completa* si richiede evidentemente che sia $\frac{p^{(r)}}{n.10^r} = 0$. Laonde trascurato questo termine, e moltiplicando, e dividendo il secondo membro della precedente equazione per 10^r avremo; $\frac{p}{n} = \frac{10^{r-1} h' + 10^{r-2} h'' + 10^{r-3} h''' \ldots + h^{(r)}}{10^r}$.

Adunque *i rotti* che possono svolgersi in una *decimale* completa di r cifre sono compresi fra, $\frac{1}{10^r}$, e $\frac{10^r - 1}{10^r}$ inclusivamente.

Si osservi però che non tutti i rotti compresi nella serie $\frac{1}{10^r}, \frac{2}{10^r}, \frac{3}{10^r}, \ldots \frac{10^r-1}{10^r}$. hanno una *decimale completa* di r cifre; bisogna escludere fra questi

quei rotti $\frac{p}{10^r}$, che *schisati* possono divenire $\frac{p}{10^{r-a}}$, i quali avranno evidentemente un numero $r-a$ di cifre *decimali*, supposto a un numero qualunque minore di r.

Si osservi in secondo luogo che i *submultipli primi* (cioè i più semplici) di 10^r sono $1, 2^r, 5^r$. Schisando per 2^r ciascun termine del secondo membro dell' ultima equazione di sopra, ella diviene;

$$\frac{p}{n} = \frac{h'}{2.5} + \frac{h''}{2^2 5} + \frac{h'''}{3^3 5} \ldots + \frac{h^{(r)}}{r^r 5} = \frac{h'}{10} + \frac{h''}{10^2} + \frac{h'''}{10^3} \ldots + \frac{h^{(r)}}{10^r}$$

Lo stesso resultamento si avrebbe schisando per 5^r. Adunque, poichè con queste due schisature la *frazione decimale* non cangia il suo primitivo valore, si fà manifesto che qualunque *frazione* $\frac{p}{10^r}$, la quale ridotta ai suoi minori termini divenga $\frac{p'}{2^r}$, ovvero $\frac{p''}{5^r}$ si potrà risolvere in una somma terminata di r cifre decimali. Prendiamo per esempio le frazioni $\frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$, e $\frac{17}{5^4} = \frac{17}{625}$: la prima si riduce ad una *frazione decimale* di 3 cifre, cioè 0, 272; la seconda si riduce ad una *frazione decimale* di 4 cifre, cioè 0, 0272.

Si osservi in terzo luogo che supposto a come sopra un numero minore di r, se si schisi per

2^{r-a}, ovvero per 5^{r-a} il secondo membro della stessa equazione $\frac{p}{n} = \frac{10^{r-1} h' + 10^{r-2} h'' + 10^{r-3} h''' \ldots + 10^{r-a} h^{(a)} \ldots + h^{(r)}}{10^r}$

Si avrà nel primo Caso

$$\frac{p}{n} = \frac{2^{a-1} . 5^{r-1} h' + 2^{a-2} . 5^{r-2} . h'' + 2^{a-3} . 5^{r-3} h''' \ldots + 2^{a-r} h^{(r)}}{2^a . 5^r}$$

e quindi $\frac{p}{n} = \frac{h'}{2^a 5^r} + \frac{h''}{2^a . 5^2} + \frac{h'''}{2^a . 5^3} \ldots + \frac{h^{(r)}}{2^a . 5^r} = \frac{h'}{10} + \frac{h''}{10^2} + \frac{h'''}{10^3} + \frac{h^{(r)}}{10^r}$.

E si avrà pure nel secondo caso questo istesso ultimo resultamento. Adunque qualunque *frazione* $\frac{p}{n}$ riducibile a $\frac{p'}{2^a . 5^r}$ se verrà trasformata in *decimale*, avrà una *mantissa* di r cifre. Così la frazione $\frac{37}{2^3 . 5^2} = \frac{37}{200}$ si riduce a 0, 185; e similmente $\frac{43}{2^5 . 5} = \frac{43}{160}$ riducesi a 0, 26875

[ovvero a $\frac{p'}{2^r 5^a}$]

Che se la *frazione* istessa $\frac{10^{r-1} h' + 10^{r-2} h'' + 10^{r-3} h''' \ldots + h^{(r)}}{10^r}$

Si schisi per 2^{r+a} ovvero per 5^{r+a}, si troverà nell'uno e nell' altro caso $\frac{p}{n} = \frac{h'}{10} + \frac{h''}{10^2} + \frac{h'''}{10^3} \ldots + \frac{h^{(r)}}{10^r}$.

Dal che si deduce che ancora le *frazioni* $\frac{2^a p'}{5^r}$, $\frac{5^a p''}{2^r}$ ridotte in decimali hanno una *mantissa* di r cifre.

Se ne faccia la prova nelle *frazioni* $\frac{2^2 . 27}{5^3} = \frac{108}{125}$ $\frac{5^2 . 3}{2^8} = \frac{75}{256}$, e si troverà la prima eguale a 0, 864 colla *mantissa* di 3 cifre, e si troverà la seconda eguale 0, 29296875 con la *mantissa* di otto cifre.

Si osservi infine che la *frazione* $\frac{n}{10^{ra}}$ ridotta a *decimale* ha una *mantissa* di cifre r-a. La stessa *mantissa* hanno le *frazioni* $\frac{p'}{2^{r-a}}$, $\frac{p''}{5^{r-a}}$; e preso un numero qualunque $b < r$-a, la stessa *mantissa* avranno pure le *frazioni*

$\frac{p'}{5^b . 2^{r-a}}$, $\frac{p''}{2^b . 5^{r-a}}$, e le frazioni $\frac{5^b . p'}{2^{r-a}}$; $\frac{2^b . p''}{5^{r-a}}$

Dagli principj resta dimostrato il metodo per distinguerà nella serie $\frac{1}{10^r}$, $\frac{2}{10^r}$. : . $\frac{10^r-1}{10^r}$ quali numeri dovranno prendersi perchè la *frazione* ridotta a *decimale* abbia una *mantissa* di r cifre, ed anche di cifre r-a

Per ritornare dalla *frazione decimale completa* alla *frazione* ordinaria che la produce (il che dicesi ancora *sommare* una *frazione decimale completa*) è facile vedere, che basta porre sotto alla *decimale* il suo denominatore, e schisarla al solito Così avremo nei minimi termini il *rotto* ricercato. Basti a ciò l' esempio della *decimale* o, 864 ottenuta qui sopra da $\frac{108}{125}$.

Scrivasi invece di o, 864, $\frac{864}{1000}$, e dipoi schisando per 8 troviamo

$$\frac{864}{1000} = \frac{108}{125}$$

34. Sia proposto di investigare quale deve essere il rotto $\frac{p}{n}$ (che come sopra suppongo ridotto ai suoi minimi termini.) acciò svolto in *frazione decimale* dia un periodo *di r* cifre che incomincino dalla prima.

Ripiglio l'equazione $\frac{p}{n} = \frac{h'}{10} + \frac{h''}{10^2} + \frac{h'''}{10^3} \ldots + \frac{h^{(r)}}{10^r} + \frac{p^{(r)}}{n.10^r}$

che esprime generalmene la *serie decimale* di r cifre in cui si svolge, qualunque *frazione* ordinaria $\frac{p}{n}$;

e considero che se dee ricominciare il periodo delle precedenti cifre r, è forza che l' avanzo $p^{(r)}$ dopo h eguagli il numeratore p. Infatti nel trasformare un rotto in frazione decimale, il *divisore* costante è n, ed è il *zero* l' aggiunta costante all' avanzo. (32) Adunque se ritorna uno degli avanzi precedenti, conforme nella nostra ipotesi ritorna l' avanzo primo p, è chiaro che debbono ritornare gli stessi avanzi

successivi da $p^{(r-1)}$ fino a p, ed in conseguenza gli analoghi *quoti parziali* espressi con le cifre h', h'', h''' ... $h^{(r)}$. Ma per meglio chiarire questa asserzione, sieno p' p'' p''' ec. gli avanzi dopo i *quoti parziali* h' h'' h''' ec. Se $p = p^{(r)}$ sarà $\frac{10p}{n.10^r} = \frac{10p}{n.10^r}$. Ora dalla divisione in principio avevano $\frac{10p}{n} = \frac{h'}{10} + \frac{p'}{n.10}$, dunque $\frac{10p}{n.10^r} = \frac{h'}{10^{r+1}} + \frac{p'}{n.10^{r+1}}$. Perciò dopo la cifra decimale h ritornerà la prima h' col primo avanzo p'. Parimente siccome dal seguito della divisione in principio avevamo $\frac{10p'}{n} = \frac{h''}{10} + \frac{p''}{n.10}$, sarà ancora $\frac{10p'}{n.10^{r+1}} = \frac{h''}{10^{r+2}} + \frac{p''}{n.10^{r+2}}$. Ritornerà adunque la seconda cifra decimale h'' col secondo avanzo p'': e così argomentando di seguito è visibile che ritornerà ogn'altra delle precedenti cifre *decimale* fino ad $h^{(r)}$, dopo la quale ricomincerà perpetuamente lo stesso periodo.

Rimane dopo tutto ciò manifesto che allora quando una *frazione* $\frac{p}{n}$ svolta in *decimale* avrà un periodo di r cifre, si avrà l'equazione

$$\frac{p}{n} = \frac{h'}{10} + \frac{h''}{10^2} + \frac{h'''}{10^3} \ldots + \frac{h}{10^r} + \frac{p}{n.10^r}$$

Moltiplicandola per 10^r, e trasponendo l'ultimo termine del secondo membro diverrà;

$$\frac{p}{n}(10^r-1) = 10.\ h' + 10\ h'' + 10\ h''' \ldots + h^{(r)},$$

e quindi $\frac{p}{n} = \frac{10\ h' + 10\ h'' + 10\ h''' \ldots + h^{(r)}}{10^r-1}$

Adunque la *frazione* $\frac{p}{n}$ il dicui *denominatore* sia 10^r-1, cioè 99999...9 fino al numero di r cifre tutte eguali al 9. si dovrà svolgere in una *decimale periodica* di r cifre

Pertanto se sia dato il periodo di una *frazione* che cominci dalla sua prima cifra, e si voglia la sua somma, cioè il rotto da cui nasce la *frazione medesima* basterà *dividere il periodo per un numero composto di tante cifre* 9 *quante sono quelle del periodo, e ridurre poi qtesto rotto ai suoi minimi termini.* Così volendo sapere da qual *rotto* nasce la *frazione periodica* 0,142857142857 ec, prendo il *rotto* $\frac{142857}{999999}$ e schisandolo troverò $\frac{1}{7}$

Fatto $m = 10.\ h' + 10.\ h'' + 10.\ h''' \ldots + h^{(r)}$, così che sia $\frac{p}{n} = \frac{m}{10^r 1}$, risulta dal precedente ragionamento che nella Serie dei *rotti*

$$\frac{1}{10^r-1},\ \frac{2}{10^r-1},\ \frac{3}{10^r-1} \ldots\ldots \frac{10^r-2}{10^r-1}$$

debbono essere tutti quelli che svolti in *decimali* danno una *mantissa* col periodo di r cifre incominciando dalla prima. Se m' rappresenta uno qualunque dei *numeratori* di questa serie, che sia *prime*

con $10^r - 1$, la *frazione* $\frac{m'}{10^r - 1}$ ridotta a *decimale* avrà il periodo che si ricerca. Infatti $\frac{m'}{10^r - 1} = \frac{m'}{10^r} + \frac{m'}{10^r(10^r - 1)}$; ma $\frac{m'}{10^r}$ è una *decimale* di r cifre (33), e l' altro termine $\frac{m'}{10^r(10^r - 1)}$ dimostra che il numero m' diviso per $10^r - 1$ dà un avanzo eguale a se medesimo. Dunque questo avanzo m'. suddiviso per $10^r - 1$ dovrà dare lo stesso periodo di r cifre, e lo stesso avanzo m'. Perciò continuando in tal modo le *divisioni* successive si avrà lo stesso periodo continuato all' infinito. Così

$$\frac{1597}{10^6 - 1} = \frac{1597}{10^6} + \frac{1597}{10^6(10^6 - 1)} =$$

o, 001597001597 ec. conforme può rilevarsi facendo per esteso la divisione per 99999. Se in oltre m' sia un *fattore primo*, o *composto* di $10^r - 1$, e nel tempo stesso non sia *submultiplo* di 10^{r-a}, la *frazione* $\frac{m'}{10^r - 1}$ ridotta ai suoi minimi termini come $\frac{p}{n}$, e dipoi ridotta a *decimale* avrà lo stesso periodo di r cifre.

Imperciocchè supponiamo $m' n = 10^r - 1$, sarà $\frac{m'}{10^r - 1} = \frac{1}{n}$: e poichè $\frac{m'}{10^r - 1}$ si suppone non riducibile ad $\frac{m''}{10^{r-a} - 1}$ avrà (ridotta in decimale) un periodo di r cifre.

Adunque lo stesso periodo avrà la frazione $\frac{1}{n}$, e più generalmente anche $\frac{p}{n}$, supposto $p < n$.

Ma se m' sia submultiplo di $10^r - 1$, e di $10^{r-a} - 1$ in questo caso $\frac{m'}{10^r - 1}$ potrà ridursi ad $\frac{m''}{10^{r-a} - 1}$, la quale frazione ridotta a *decimale* avrà evidentemente un periodo $r-a$ di cifre.

Dalle precedenti conclusioni si deduce la soluzione del Problema Generale: *Trovare tutte le frazioni* $\frac{p}{n}$, in cui n non è $10^r - 1$, *le quali ridotte a decimali danno un periodo r di cifre incominciando dalla prima*: Ma per una tale soluzione completa si richiede il metodo di trovare tutti i *fattori primi* del numero $10^r - 1$, che qui non può spiegarsi, e che sarà dato a suo luogo nell' Algebra. E' opportuno non ostante lo sciogliere qui lo stesso problema in qualchè caso particolare proponendo per esempio $r = 8$, poichè per questo caso resterà manifesto il modo da tenersi per la soluzione generale.

Premetto a tale uopo *i fattori primi* di $10^r - 1$ da $r = 1$ fino ad $r = 8$, come segue.

$$10 - 1 = 3^2$$

$$10^2 - 1 = (10 - 1)(10 + 1) = 3^2 . 11$$

$$10^3 - 1 = 999 = 3^2 . 111 = 3^3 . 37$$

$$10^4 - 1 = (10^2 - 1)(10^2 + 1) = 3^2 . 11 . 101$$

$$10^5-1 = 3^2.11111 = 3^2.41.271$$

$$10^6-1 = (10^3-1)(10^3+1) = 3^3.7.11.13.37$$

$$10^7-1 = 3^2.1111111$$

$$10^8-1 = (10^4-1)(10^4+1) = 3^2.11.101.10001 =$$

$$3^2.11.101.73.137$$

Se vogliansi adesso tutte le *frazioni* $\frac{p}{n}$ riducibili al periodo decimale di 8 cifre, non si dovrà prendere $\frac{p}{3^2}$, perche essendo 3^2 un fattore di 10^8-1 la *frazione* darebbe il periodo di una sola cifra. Neppure si potranno prendere le frazioni $\frac{p}{11}$, $\frac{p}{101}$; ovvero qualunque altra col *denominatore* composto dei fattori 3^2, 11, 101, perche questi *denominatori* essendo *submultipli* parte di 10^2-1, e parte di 10^4-1, formeranno *frazioni* riducibili ad un periodo *decimale* di 2, ovvero di 4 cifre. Adunque i soli *fattori* di 10^4+1, cioè 73, 137, e 73×137, daranno le *frazioni* $\frac{p}{73}$, $\frac{p}{137}$, $\frac{p}{73\times137}$ riducibili al periodo decimale di 8 cifre. Applicando il calcolo al solo esempio del *rotto* $\frac{46}{73}$ si troverà in fatto

$$\frac{46}{73} = 0,63013698630136 98 \text{ ec.}$$

35. Passando a quelle *frazioni*, che ridotte a *decimali* cominciano il periodo dopo un certo numero

di cifre, chiamerò h', h'', h'''.... $\overset{(r)}{h}$ le cifre r, che precedono il periodo, ed l', l'', l'''.... $\overset{(m)}{l}$ le cifre m del periodo. Così qualunque *frazione* $\frac{p}{n}$ ridotta a *decimale* con la richiesta condizione verrà espressa generalmente sotto questa forma.

$$\frac{p}{n} = \frac{h'}{10} + \frac{h''}{10^2} + \frac{h'''}{10^3} \ldots + \frac{\overset{(r)}{h}}{10^r} + \frac{l'}{10^{r+1}} + \frac{l''}{10^{r+2}} + \frac{l'''}{10^{r+3}} \ldots$$

$+ \frac{\overset{(m)}{l}}{10^{r+m}}$ + ec. in infinito Riducendo allo stesso *denominatore* 10^r le cifre h, e rammentandosi del modo qui sopra spiegato (3*), con cui si somma la *frazione* periodica di m cifre, si giungerà ad ottenere;

$$\frac{p}{n} = \frac{h' 10^{r-1} + h'' 10^{r-2} + h''' 10^{r-3} \ldots + \overset{(r)}{h}}{10^r}$$

$$+ \frac{1}{10^r} \frac{\left(l' 10^{m-1} + l'' 10^{m-2} + l''' 10^{m-3} \ldots + \overset{(m)}{l} \right)}{10^m - 1}$$

ovvero dicendo h, l i *numeratori* di queste due frazioni, avremo più semplicemente $\frac{p}{n} = \frac{h}{10^r} + \frac{l}{10^r (10^m - 1)}$

Da questa ultima aquazione primieramente si impara, che per sommare una *decimale* data con cifre che precedano un periodo, conviene fare la somma di due frazioni. La prima $\frac{h}{10^r}$ è composta delle cifre

decimali fuori del periodo, e si sà come deve sommarsi (33). La seconda $\frac{l}{10^r(10^m-1)}$ è composta delle cifre m del periodo divise per un numero di m cifre tutte eguali a 9, alle quali in grazia del moltiplicatore 10^r conviene aggiungere un numero r di *zeri*.

Prendasi per esempio a sommare *la decimale* 0, 875142857142857 ec. Le due frazioni da considerarsi in questa somma sono $\frac{875}{1000}$, $\frac{142857}{999999000}$

Adunque schisando, e dipoi sommando si troverà

$$\frac{875}{1000} + \frac{142857}{999999000} = \frac{7}{8} + \frac{1}{7000} = \frac{49008}{56000} = \frac{3063}{3500}$$

somma cercata.

Vogliasi quindi esaminare quali *frazioni* $\frac{p}{n}$ daranno un numero r di cifre, che preceda un periodo di m cifre. E' visibile che esse saranno comprese nella somma delle due frazioni, $\frac{h}{10^r} + \frac{l}{10^r(10^m-1)}$ in cui h può essere $1, 2, 3 \ldots 10^r - 1$, ed $l = 1, 2, 3 \ldots 10^r(10^m-1)-1$. Nella prima serie però il *numeratore* h non deve essere tale che la frazione $\frac{h}{10^r}$ sia riducibile ad $\frac{h'}{10^{r-a}}$, ovvero $\frac{h'}{2^{r-a}}$, ovvero $\frac{h'}{5^{r-a}}$, e a tutte le altre *frazioni* contemplate nel N°. 33, per le quali la *mantissa* di h scema di un numero a di cifre. Nella seconda serie il numeratore l non deve es-

sere composto di alcuno dei fattori di $10^{m-a} - 1$, giacchè in tal caso si è veduto che scemano le cifre del periodo (34)

Per fare qualche Applicazione di questa teorica, sia proposto di trovare il più semplice *rotto* $\frac{p}{n}$. che dopo un numero r di cifre *decimali* abbia un periodo di m cifre. A tale oggetto si scelga il minimo *fattore primo* p' di $10^m - 1$. Si sà (33) che $\frac{1}{2^r}$ è il rotto più semplice che sia riducibile ad una *decimale* di r cifre. Dunque averemo $\frac{p}{n} = \frac{1}{2^r}\left(\frac{h+l}{p'}\right)$ che dovrà ridursi al valore il più semplice Si osservi frattanto che in questa equazione i numeri 2^r, e p' sono determinati, onde converrà che $p'h+l$ sia un *numero primo* con 2^r e con p'; vale a dire che $p'h + l$ sia un numero dispari primo con p'. E poi che è impossibile che sia $p' = 5$, qualunque numero $p'h+l$, che terminerà in 5 darà $\frac{p}{n}$ con le condizioni richieste. Si vede in fine che si avrà il valore più semlice di $\frac{p}{n}$ facendo $p'h + l = 1$, ed avremo così $\frac{p}{n} = \frac{1}{2^r \cdot p'}$; *equazione* che risolve il proposto Problema.

Sia per esempio $r = 4$, $m = 8$ sarà $p' = 73$ (34). Adunque la *frazione più semplice che possa* ridursi a quattro cifre *decimali* col successivo periodo di 8 cifre sarà $\frac{1}{16 \times 73} = \frac{1}{1168}$. Fatto il calcolo si trova infatti $\frac{1}{1168} = 0,0008561643835616438 3$ ec.

36. Resta a dirsi di quell' ultima classe *di rotti*, che ridotti a *decimali* potessero dare una serie infinita di cifre senza alcun periodo. Questo caso non può mai succedere in un *rotto* ordinario $\frac{p}{n}$, che finqui ha formato l' oggetto delle nostre discussioni. Infatti allorchè questo si riduce a *decimale*, il *divisore* è costantemente n, l' aggiunta all' avanzo è costantemente il *zero*; dunque (essendo l' avanzo sempre minore del *divisore*) dopo $n-1$ avanzi al più dovrà ritornare uno degli avanzi precedenti, e dovrà perciò incominciare il periodo. Dalche si vede che il massimo periodo *decimale* a cui è siducibile un rotto $\frac{p}{n}$ avrà $n-1$ cifra.

Se il rotto $\frac{p}{n}$ derivasse dalla somma di più *frazioni*, queste sarebbero parzialmente riducibili o a *decimali complete*, o a *decimali periodiche*; perciò in questo caso $\frac{p}{n}$ si ridurrebbe ad una di quelle *decimali* che incominciano il periodo dopo alcune cifre, ma non mai ad una decimale infinita senza periodo. Pertanto per ottenere una siffatta *decimale* conviene che il numero delle frazioni che la formano sia infinito, e di ciò ne danno molti esempj l' Algebra, e la Geometria; Ovvero conviene che il *divisore* che forma *la decimale* sia continuamente variabile, e di ciò ne vedremo un esempio nell' *estrazione della radice quadra*, e *cuba*, dove si tratta di approssimazione.

SOMMA DEI DECIMALI

37 La Somma *dei decimali* non differisce dalla Somma degli intieri. Siccome in questa si avvertì di porre in colonna le cifre *omogenee*, conviene del

pari badare nella somma dei *decimali* a porre i *decimi* in colonna con i *decimi*, i *centesimi* coi *centesimi* ec. Essendosi in addietro diffusamente spiegata la natura dei *decimali* non vi è difficoltà per intendere la pratica di questa Operazione nei seguenti esempj.

16, 5848	3, 18	7, 1496
11, 72	17, 25	25, 275
13, 184	4, 837	14, 822
41, 4888	25, 267	47, 2466

SOTTRAZIONE DEI DECIMALI

38. Anche la Sottrazione dei *decimali* si fà come quella degli intieri Si avverta però che quando nel *sottraendo* il numero dei *decimali* supera quello de *decimali* del *Totale*, si aggiungono a questi (ovvero vi si sottintendono aggiunti) altrettanti *zeri*, quanti bastano perche il numero delle cifre *decimali* sia eguale nel *Totale*, e nel *sottraendo*. Questi *zeri* riducono il *Totale* allostesso *denominatore* del *Sottraendo*, e non ne alterano ilvalore. (31). Premessa questa avvertenza si intenderà facilmente la pratica di questa Operazione nei seguenti esempj.

15, 19	9, 517	25, 1
8, 317	3, 6194	7, 6594
6, 873	5, 8976	17, 4406

MOLTIPLICA DEI DECIMALI

39. Per eseguire questa Operazione si faccia al solito la moltiplica *dei fattori*, come se non esistessero cifre *decimali*; dipoi dalle cifre del prodotto se ne separino tante da destra a sinistra colla virgola quanta è la somma dei *decimali* dei due *fattori*.

Sia per esempio da moltiplicarsi 5, 72 per 18, 7. Moltiplico 572 per 187; ed in tal modo rendo il *fattore* 5,72 *cento volte* maggiore di sè; e l' altro 18, 7 *dieci volte* maggiore di sè. Il prodotto $572 \times 187 = 106964$ sarà adunque $10 \times 100 = 1000$ volte maggiore del vero; che però per restituirgli il vero suo valore fà di uopo dividere per 1000 il prodotto 106964, il che evidentemente avviene separando tre cifre in questo modo, 106, 964; ed appunto 3 è la somma dei *decimali* dei due *fattori*

Ma per dimostrare questa Operazione in generale, sia p il numero intiero, e $\frac{d}{10^m}$ il *decimale* annesso. di un *fattore*; sia p' l' intiero, e $\frac{d'}{10^{m'}}$ il decimale annesso dell' altro *fattore*. Riduco il primo $p + \frac{d}{10^m}$ a $\frac{10^m p + d}{10^m}$; riduco il secondo: $p' + \frac{d'}{10^{m'}}$ a $\frac{10^{m'} p' + d'}{10^{m'}}$. Quindi per maggiore semplicità faccio $10^m p + d = h$ $10^{m'} p' + d' = h'$. Il prodotto dei due *fattori* sarà $\frac{hh'}{10^{m+m'}}$

Ma questo numero si esprime in cifre *decimali* separando nel prodotto hh' con una virgola un numero $m + m'$ di cifre da destra verso sinistra; ed essendo $m + m'$ un numero eguale a tante *unità*, quante sono le cifre *decimali* dei due fattori, resta dimostrata la regola insegnata di sopra.

Qualora il prodotto hh' contenesse un numero di cifre minore di $m+m'$, converrà aggiungere tanti *zeri* sulla sinistra fino alla virgola per supplire a questa mancanza. Ecco alcuni esempj per la pratica di queta Operazione.

4, 562	1, 342	0, 141
2, 86	0, 123	0, 014
27372	4026	564
36496	2684	141
9124	1342	0, 001974
13,04732	0,165066	

Se i *decimali* dei *fattori* fossero molti, e si volesse il prodotto esatto fino ad un certo numero di *decimali* trascurato il resto, si può operare nel modo seguente conqualchè sollievo alla lunghezza del Calcolo. Vogliasi per esempio con sole *quattro* cifre *decimali* esatte il prodotto 5, 84578×3, 25293, che ne avrebbe *dieci*. E' evidente che per tale resultamento conviene considerare *zero* le ultime *sei* cifre *decimali* alla destra di questo prodotto eseguito per l' intiero. Che però impostando al solito la moltiplica pongo per regola generale tanti *zeri* nel primo *prodotto parziale* quante sono *le cifre decimali meno* una, che si debbono sopprimere; e perciò nel nostro caso vi pongo *cinque zeri* Questi *zeri* occupano il posto delle prime cinque cifre, che risulterebbero dalla motiplica di 3×584578. Prendo il solo prodotto della sesta cifra, 3×5=15, ed ottengo così 150000 resultamento esatto fuoriche nell' ultime *sei* cifre 500000,

5, 84578
3, 25293
1500000
5220000
1168000
2921500
1169140
1753734
19, 0157 | 800000

Prodotto approssimato
19, 0158

Nel secondo *prodotto par-*

ziale per 9 trascuro le prime quattro cifre del *Moltiplicando* p mendo *quattro zeri* invece del loro prodotto, e ristringo la moltiplica a 9× 58 = 522, resultamento esatto nelle sole prime due crife 52.

Seguito la moltiplica per 2 trascurate *tre* cifre nel *moltiplicando*: dipoi per 5 trascurandone *due*; dipoi per 2 trascurandone *una*; ed infine per 3 non trascurandone alcuna. E' facile intendere che il prodotto 19010780000 così ottenuto è esatto fuori che nelle ultime *sei* cifre 80000. Che però separate con virgola le ulime *dieci* cifre che sono *decimali*, sopprimo di queste le ultime *sei* 80000, e ritengo soltanto le prime *quattro* 0157. Perchè poi la cifra 8 susseguente al 7 e maggiore di 5, pongo 8 invece di 7 (31), ed ottengo infine il prodotto approssimato al vero con quattro decimali 19,0158.

DIVISIONE DEI DECIMALI

40. Anche questa operazione si eseguisce come quella degli intieri avvertendo però di pareggiare con degli *zeri i decimali del Dividendo*, *e del Divisore* dove l'uno ne abbia più dell'altro. Così le *mantisse* sono ridotte allo stesso *denominatore*; e perciò, tolte le virgole, *il dividendo*, e il *divisore* sono due *rotti* collo stesso *denominatore*, frà i quali trascurato il comune *denominatore*, si farà la *divisione* al solito (30).

Debbasi per esempio dividere 578,4 per 7,151 Riduco le *mantisse* ad egual numero di cifre prendendo 578,400 in vece di 578,4: così esse avranno lo stesso *denominatore* 1000. Tolgo le virgole e sottintesi i *denominatori* il *divisore* diviene $\frac{7151}{1000}$, il

dividendo $\frac{578400}{1000}$: trascuro i *denominatori*, e la *divisione* si riduce a $\frac{578400}{7191} = 80,88379$ ec

Volendo diminuire la lunghezza del Calcolo allorchè i *decimali* del *dividendo* sono troppi, e contentandosi di un quoto esatto fino ad nn certo numero di *decimali*, si può usare il seguente compendio.

Sia da dividersi per 2, 547 il numero 5, 6596185043, e vogliasi il *quoto* con cinque *decimali* esatti, trascurati gli altri successivi. Lascio nel *dividendo* i primi *sei* decimali dopo la virgola, e così sempre per regola generale uno di più di quelli che voglio nel *quoto*. Aggiunti quindi gli *zeri* necessari nel *divisore*, incomincio al solito l'operazione. Il primo *quoto parziale* è 2, che sarà numero intiero, e l'avanzo 565618 è esatto fino alla sesta cifra del proposto *dividendo*. Seguitando adesso a trovare i *quoti decimali* non aggiungo il zero all'avanzo, ma considero il *divisore diminuito* dall'ultima cifra a destra, e perciò divido per 254700. Il primo *quoto decimale* sarà adunque 2, e l'avanzo 56218 sarà esatto per tutte le sue *cinque* cifre. Non vi aggiungo il *zero*, e considerando il *divisore* diminuito delle due ultime cifre a destra seguito la *divisione* per 25470. Anche il secondo *quoto decimale* è 2, e l'avanzo esatto nelle sue *quattro* cifre è 5278. Proseguendo così a trascu-

2547000	5659618
2,222074	565618
	56218
	5278
	184
	9
	1

Quoto esatto con 5 Decimali 2, 22207

rare nel *divisore* una cifra ad ogni *quoto parziale* giungo fino al sesto *decimale* 4

Peraltro siccome il *quoto* ricercato dee contenere soltanto cinque cifre *decimali* esatte, esso sarà 2,22207. la sesta cifra 4 è stata calcolata pel solo motivo che se essa fosse stata maggiore di 5, conveniva aggiungere una unità alla cifra precedente 7, il che qui non occorre (31)

Considerando questo metodo compendioso di *divisione* si scorge facilmente che esso consiste nelle operazione inversa del compendio usato qui indietro per la *moltiplica*. Usando altresì la *riprova* del prodotto del *quoto* pel *divisore* si troverà questo resultamento 5, 65961229000 che eguaglia il proposto *dividendo* fino alla quinta decimale, adunque il *quoto* 2, 222074 è esatto fino alla quinta decimale. La sesta cifra 4 è maggiore del vero perche le cifre tralasciate a bella posta nel dividendo avrebbero dato, il quinto avanzo evidentemente maggiore di 90000, e perciò il vero *quoto* sarebbe stato minore di 4.

CAP. IV

Algoritmo delle Quantità Letterali

41. L' Algebra è la scienza del Calcolo applicato alle *quantità* astratte, considerate cioè come grandezze unicamente suscettibili di aumento, e di diminuzione, senza che siano determinate per se medesime, come lo sono i numeri, o per le cose che possono rappresentare. Quando l' Aritmetico dice; sia il numero 147 che debba sommarsi, sottrarsi ec., queste operazioni sono determinate, e ristrette unicamente a quel numero; così allorche il Geometra dice; sia la retta A B da dividersi in un qualunque numero di parti eguali, il suo problema è generale rispetto alla lunghezza maggiore, o minore della retta, e rispetto al numero delle parti eguali; ma è d' altronde pro-

blema determinato rispetto alla qualità della linea, ed alla specie particolare della estensione lineare. Infatti la sua soluzione non abbraccia la divisione in parti eguali delle linee curve, e molto meno quella delle superficie, e dei solidi. Ma alloraquando l'Algebrista imprende i suoi calcoli, questi non si limitano ad alcun soggetto definito; essi sono, egualmente applicabili, ed ai numeri ed alle linee, ed alle superficie, ed in somma a qualunque cosa, che sia quanta.

Le Quantità Algebriche si esprimono per mezzo delle lettere dell' Alfabeto a, b, c, ec. alle quali frequentemente si uniscono anche i numeri affine di semplicizzare le espressoni composte di sole lettere. E' uso altresì, ma non regola essenziale, di denotare con le prime lettere a, b, c, ec. le quantità cognite, e quelle di grandezza costante, e di denotare con le ultime x, y, z. ec. le quantità incognite, e quelle di grandezza variabile.

42. Ciascuna lettera è preceduta dal segno $+$, ovvero $-$, (7) che indica comunemente la *somma*, o la *sottrazione* con le altre, a cui trovasi unita. Peraltro cosiderando in se stessa la lettera così notata, essa riceve dal segno $+$, o $-$ un significato molto più esteso, che fà d' uopo ben concepire. Si alcune quantità crescono, o decrescono in un certo senso, possono con esse coesistere altre quantità, che crescano o decrescano in senso opposto. Per sempio se le quantità a, b esprimano crediti, ovvero spazi percorsi da un grave, cadente, ovvero forze attraenti ec; vi possono essere nello stesso calcolo altre qantità c, d, le quali esprimano cose opposte, cioè debiti, spazi percorsi da un grave ascendente, forze repellenti ec. Perciò qualora le prime a, b sien notate col segno $+$, le altre c, d si notano col segno $-$, o viceversa. E siccome per la *somma* le quantità

crescono, e per la *sottrazione* diminuiscono, così queste due opposte operazioni entrano nel significato generale dai segni +, —, molto più quando le lettere denotano *quantità astratte* da alcun soggetto particolare. Pertanto le quantità precedute dal segno + diconsi generalmente *positive*, cioè crescenti, o decrescenti in un determinato senso; le qantità precedute dal segno — diconsi *negative*, cioè crescenti, o decrescenti in senso opposto a quello delle *positive*

43. Frequentemente accade di usare nel calcolo la stessa lettera ed in specie nella *somma*, e nella *moltiplica*. Quanto alla Somma se avessimo per esempio $a+a+a+a-b-b$ si scrive compendiosamente $4a-2b$, ed i numeri, che precedono le lettere diconsi *coefficienti*, i quali mostrano quante volte dee prendersi, la stessa quantità Quando il coefficiente non è espresso, esso è l' *unità*, la quale perciò sempre si sottintende congiunta alla sinistra della lettera, che non ha, *coefficiente*. Quando non è espresso il segno esso è sempre il +: il segno — non si trascura mai. Così b significa lo stesso che $+1b$

44. Allorchè una quantità moltiplica più volte se medesima come $a\times a\times a\times a\times a$ si esprime più semplicemente questo prodotto scrivendo a^5, come abbiamo detto riguardo ai numeri (7); ed il numero 5 così posto non solo dicesi *potenza*, ma anche più comunemente *esponente*, perche espone colle sue *unità* quante sono le lettere istesse, che si moltiplicano fra loro. Così chiamato n un numero intiero qualunque, la quantità b^n indica il prodotto di un numero n di letttere b moltiplicate fra sè. Le quantità coll'esponente come b^2, b^3, b^4 ec. invece di

leggersi come si è detto (7) *b alla seconda*, *b alla terza*, *b alla quarta* ec. lasciando la parola sottintesa *potenza*, si leggono *b di due*, *b di tre*, *b di quattro gradi*, e si lascia la parola *gradi*. Vedremo in seguito accuratamente in che cosa differiscano le significazioni delle parole *potenza*, *grado*. Ritenendo per ora l' idea della parola *potenza* (7) aggiungerò che una qualunque quantità *b* alzata alle diverse potenze si chiama rispetto a quelle la loro *radice*. Dimanierachè b^2 è rispetto a *b* la seconda *radice*; lo stesso *b* è *la radice terza* di b^3; è *radice quarta* di b^4; è radice *n*-sima di b^n. Quando nella quantità manca l' *esponente* vi si sottintende l'*unità*; così *b* é lo stesso che b^1: è perciò si dice che *b* è potenza prima di se medesima, come lo è qualunque altra quantità senza esponente. I segni di moltiplicazione, e di divisione sono li stessi di quelli già descritti pei numeri (7). Ma nella moltiplica invece di scrivere $a \times b \times c$, ovvero $a \,.\, b \,.\, c$ si scrive *abc*; vale a dire si intende la moltiplica delle lettere *scrivendole di seguito senza alcun segno intermedio*.

45. Qualunque espressione Algebrica composta comunque di un solo segno +, o —, di *lettere*, di *coefficiente*, e di *esponenti*, dicesi *termine algebrico*. La quantità, che ha un solo *termine* come $+4ab^3$ dicesi *monomio*; la quantità come $a + b$ composta di due *termini*, dicesi *binomio*; quella che ha tre termini dicesi *trinomio*, e così di seguito. In generale poi dicesi *polinomio* la quantità composta di più *termini*. *I monomj* si dicono ancora quantità *incomplesse*; *i polinomj* quantità complesse.

SOMMA ALGEBRICA

46. Questa operazione consiste nella riduzione dei termini *omogenei* sotto un solo coefficiente. In Algebra sono termini *omogenei* quelli composti delle medesime lettere, ciascuna dalle quali in un termine abbia l' esponente eguale a quello della lettera medesima posta nel altro termine: il segno, ed il coefficiente diverso non toglie l' omogeneità. *I monomj* $3ab$, $2ab$, e parimente $-cb^2d$, $+5cb^2d$ sono *omogenei;* sono all' incontro *eterogenei i termini* ab, cd, come ancora ab^2, ab. Allorchè tratteremo della moltiplica si potrà far conoscere la ragione di questa *omogeneità*. Ciò premesso la somma si eseguisce con le regole seguenti.

Prima. Si pongano in colonna i termini *omogenei* coi loro respettivi Segni.

Seconda. Nei termini *omogenei* collo stesso segno, sia $+$, sia $-$ si sommano *i coefficienti*, e si pone nel totale, questa somma per nuovo *coefficiente*: vi si pongono altresì lo stesso segno, e le stesse lettere cogli esponenti loro. Così $5a^2+3a^2$ fanno la somma di $8a^2$, e similmente $-4ba-5ab=-9ab$

Terza. Se i termini *omogenei* hanno diverso segno, dal *coefficiente* maggiore dell' uno si toglie il minore dell' altro E' evidente che il residuo sarà una parte del *coefficiente* maggiore, e perciò ne dovrà ritenere il segno. Questo residuo col segno, che gli conviene sarà il *coefficiente* richiesto, al quale come nella passata regola si porranno accanto le stesse lettere cogli stessi *esponenti* dei termini

sottratti. Così $3x^2b - 2x^2b = x^2b$, $4ax - 7ax = -3ax$

Quarta. se frà i termini da sottrarsi ve ne sieno degi *eterogenei* si scrivano nel *totale* quali sono senza alcuna mutazione.

ESEMPJ

$$\begin{array}{rl} & 2ab - 3a^2c + 7b - 4d \\ & 4ab + 6a^2c + 8b + 5x \\ & \quad - 5a^2c - 4b \\ \hline \textit{Totale} & 6ab - 2a^2c + 11b - 4d + 5x \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 3d + 4ad^2 + d^3 - 8ax^4 + 2ax^4 \\ & - 5d + 6ad^2 - 2d^3 + 6ax^4 \\ & + 5ad^2 - 3d^3 + 10ax^4 \\ \hline \textit{Totale} & - 2d + 15ad^2 - 4d^3 + 8ax^4 + 2ax^4 \end{array}$$

SOTTRAZIONE ALGEBRICA

47. Sottrare in Algebra non significa *togliere*, ma sivvero *prendere la differenza frà due quantità*. La *differenza* poi è ciò che deve togliersi o aggiungersi all' una acciò divenga l' altra quantità su di cui cade la *sottrazione*. Così la *differenza* fra $+3a$, è $+4a$ è $+a$; ed all' opposto la *differenza* fra $+4a$, e $+3a$ è $-a$: perchè nel primo caso è evi-

dente che acciò $+3a$ divengano $4a$ conviene aggiungerli $+a$; e nel secondo caso parimente è evidente che accio $+4a$ divengano $+3a$ conviene toglierli a. Dopo ciò si intenderà facilmente che la *differenza* fra $-5ab$, e $+7ab$ è $+12ab$, ed al contrario frà $7ab$, e $-5ab$ vi è la differenza di $-12ab$.

Per eseguire la *sottrazione* Algebr ca si pongano i *termini omogenei* gli uni sotto gli altri, e siccome è uso costante di considerare sottraenda la quantità posta sotto all'altra, si prenderanno le *differenze* fra i *termini* posti di sotto, e quelli posti di sopra nel modo gia spiegato.

Se nella fila inferiore dei *termini* ve ne fossero degli *etérogenei* con i superiori, si prenderà la *differenza* frà questi, ed il *zero*; il che torna lo stesso che cambiargli i segni dal $+$ in $-$, ovvero dal $-$ in $+$. Peresempio se da $-5a+2b$ si debba sottrar $3a-5b-c$, scrivo questa quantità sotto alla prima e dico; Acciò $3a$ divenga $-5a$. conviene toglierli $8a$. Segno perciò la *differenza* $-8a$, è proseguo:

$$\begin{array}{l} -5a+2b \\ 3a-5b-c \\ \hline \textit{Differenza}\ -8a+7b+c \end{array}$$

Acciò $-5b$ divenga $+2b$ conviene aggungerli $7b$; e segno la *differenza* $+7b$. Infine dico, acciò il $-c$ divenga *zero* (cioè nessuno c, conforme si vede non esistere nella quantità superiore) conviene agiungere $+c$; e quì l'operazione è terminata.

La *riprova* della sottrazione Algebrica si fà come in Aritmetica. Si somma cioè la *differenza* colla quantità sottratta, ed il resultamento dee essere *identico* con la quantità superiore, che dicesi anche *Totale*.

ESEMPJ

$$5ab - 2x + 3ax - d$$
$$4ab - 5x - 7ax + 4d$$

Differenza $ab + 3x + 10ax - 5d$

Riprova $5ab - 2x + 3ax - d$

$$8b^2 - 4ab + 4ab^2 - 7d$$
$$6b^2 - 2ab + 9ab^2 - 4d + 2ad$$

Differenza $2b^2 - 2ab - 5ab^2 - 3d - 2ad$

Riprova $8b^2 - 4ab + 4ab^2 - 7d$

APPLICAZIONE DELLA SOMMMA E SOTTRAZIONE ALGEBRICA ALLA RISOLUZIONE DI ALCUNE EQUAZIONI DI PRIMO GRADO.

48. *Equazione* è l'eguaglianza di due quantità complesse, o incomplesse. Essa si annunzia ponendo il segno = fra le quantità, che si eguagliano conforme si è veduto in addietro per molti esempj. Le parti eguali dell' *Equazione* separate dal segno = si chiamano i suoi *membri*; il *polinomio*, o *monomio* posto alla sinistra di questo segno si dice il *primo membro*; gl' altri *termini* posti alla destra dello stesso segno compongono il *secondo membro*.

Abbiamo accennato a principio del presente Capitolo che le quantità *incognite* si esprimono colle ultime lettere dell' alfabeto x, y, z, ec., e le quantità *cognite* con le prime a, b, c ec. Qui adopreremo spesso per le quantità *cognite* i numeri in vece delle lettere, acciò la teorica delle equazioni, che è della massima importanza, comparisca nel suo bel principio alquanto più intelligibile ai Principianti.

Le *Equazioni* conprendono sempre le quantità *cognite*, ed *incognite* miste in diversi modi fra loro, e si dicono risolute quando si giunge a determinare il valore delle *incognite* per mezzo delle *cognite*. Il metodo di risolvere le *equazioni* applicate ai *Problemi* si chiama *Analisi Mattematica*, ed anche semplicemente *Analisi*.

Le *equazioni* sono distinte in differenti *gradi*, i quali prendono la loro grandezza da quella della *potenza* dell' *incognita*, di cui si cerca il valore; ed ecco una delle ragioni per cui gli *esponenti* indicano oltre la *potenza* anche il *grado* della quantità in cui sono posti (43). Così l' *equazione* $x + a = b + c$ è di *primo grado*, perchè l' incognita x è alla *prima potenza* (7) l' *equazione* $x^2 + px = q$ è di *secondo grado*, perchè l' *incognita* x giunge fino alla *seconda potenza*. In generale $x^m = a$ e una equazione del grado m

La risoluzione delle *Equazioni* dipende in gran parta dai tre seguenti principj evidenti per se medesimi.

Primo. Se a quantità eguali si aggiungano, ovvero si tolgano le stesse quantità, o quantità eguali, le somme, ovvero i residui sono eguali.

Secondo. Se quantità eguali si moltiplicano, o si dividano per la stessa, o per quantità eguali i prodotti, ovvero i quoti saranno eguali.

Terzo. Se quantità eguali si elevano alla stessa *potenza*, o se ne estrae la *ràdice* medesima, queste *potenze*, ovvero queste *radici* saranno eguali.

Fermiamoci ad applicare questi principj alle equazioni di *primo grado* in cui le *incognite* sono sommate, sottratte, moltiplicate, o divise da quantità *cognite*, e viceversa *I moltiplicatori*, ed i *divisori* delle incognite saranno per adesso sempre numeri, finchè non siasi trattato della *Moltiplica*, e della *Divisione* Algebrica.

Sia pertanto proposta a risolversi la *Equazione*

$$\frac{3x}{4} + a = b + c$$

L' incognita x diverrà *cognita* se essa rimane sola in un membro; poichè allora eguaglierà il polinomio contenuto nell' altro membro, che sarà composto da numeri, e da altre quantità note. Adunque acciò rimanga sola l' incognita x nel primo membro della *Proposta* conviene togliere da questo la quantità $+a$, il *moltiplicatore* 3, ed il *divisore* 4.

Per togliere $+a$ salva l' eguaglianza, sottraggo a dall' uno, e dall' altro membro, ed ottengo così;

$$\frac{3x}{4} = b + c - a$$

Per *liberare l' incognita* dal *moltiplicatore* 3 si vede che bisogna dividere tutti i *termini* della *equazione* per 3; giacchè così l' eguaglianza non sarà turbata. Fatta adunque tale divisione la precedente equazione diverrà;

$$\frac{x}{4} = \frac{b + c - a}{3}$$

Infine sarà *liberata* l' *incognita* dal *divisore* 4 se si moltiplicano per 4 i *termini* tutti di questa ultima *equazione*. Con tale moltiplica essa diverrà;

$$x = \frac{4(b + c - a)}{3}$$

Questo ultimo resultamento si chiama l' *equazione finale*, ovvero la *risolvente*, perchè essa appunto de-

termina il valore della *incognita*, e così resta risoluta la *proposta equazione*.

Il modo di verificare *la risolvente* consiste nel prendere il valore da lei dato dell' incognita x, e sostituirlo nella *Proposta*, e vedere così se i *polinomj* dei suoi membri si eguagliano. Nel nostro Caso la *Proposta* è; $\frac{3x}{4}+a=b+c$

La *Risolvente* dà $x=\frac{4}{3}(b+c-a)$

Sostituendo nella prima invece di x il *polinomio* $\frac{4}{3}(b+c-a)$ si ottiene;

$$\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}(b+c-a)+a=b+c$$

Ma $\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=1$, dunque la precedente diverrà;

$$b+c-a+a=b+c,$$

cioè $$b+c=b+c$$

Resultamento identico che dimostra ad evidenza l' esattezza del valore della incognita x dato dalla *Risolvente*.

Vi è ancora altro metodo pratico per eseguire la stessa riprova, e questo consiste nel sostituire alle quantità *cognite* altrettanti numeri a capriccio, e vedere dipoi se con tutte queste sostituzioni nella *Proposta*, e nella *risolvente* il valore dell' *incognita vi sodisfa sempre*; cioè se sempre forma l' egualianza dei *membri* della *Proposta*. Riprendo per esempio la stessa *Proposta*, e la stessa *Risolvente* che sopra, e faccio $a=8$, $b=9$, $c=11$. La Proposta con la sostituzione di questi numeri alle lettere diviene $\frac{3x}{4}+8=9+11=20$

La *risolvente* con la stessa sostituzione dà $x=$

$\frac{4}{3}(9+11-8)=16$ Posto 16 invece di x nella *Proposta*, ella sarà; $\frac{3\ 16}{4}+8=20$

ovvero $12+8=20$

Resultamento esatto, che mostra essere 16 il valore di x nella ipotesi di $a=8$, $b=9$, $c=11$.

Se si fosse preso $a=7$, $b=1$, $c=5$, avremmo avuto colla *Proposta* $\frac{3x}{4}+7=6$

e con la *Risolvente* $x=\frac{4}{3}(6-7)=-\frac{4}{3}$

Questo valore (benchè negativo) sostituito nella precedente dà il resultamento esatto $\frac{3}{4}\times-\frac{4}{3}+7=6$, cioè $-1+7=6$

Vedremo più innanzi cosa significhino questi valori negativi delle incognite relativamente al Problema rappresentato dalle *equazioni*: frattanto soggiungerò che la *Risolvente* espressa in termini generali, come appunto è $x=\frac{4}{3}(b+c-a)$, si chiama ancora una *formola*; e questa parola significa per se medesima *una espressione generale di termini Algebrici*, che *indica le operazioni da farsi in tutti i casi particolari per avere il resultamento richiesto.* I casi contemplati qui sopra sono stati i diversi valori numerici dati alle quantità a, b, c; qualunque altro valore si fosse dato loro, si sarebbe trovato sempre vero il valore della incognita x nell' espressione $\frac{4}{3}(b+c-a)$. E' questa adunque una *formola*, che risolve la *Proposta* in tutti i casi particolari.

Ritornando per alcun poco alle regole prescritte per la risoluzione delle equazioni si osservi, che se

la *Proposta* di sopra fosse stata;

$$\frac{3x}{4} - a = b + c$$

si sarebbe tolta $-a$ dal primo *membro* coll'aggiungere $+a$ ad ambedue i membri, e ne sarebbe resultato

$$\frac{3x}{4} = b + c - a$$

Da questo, e da ogni altro simile esempio si impara; *Che per togliere un termine da un membro di un equazione salva la egualità conviene trasportarlo nell' altro membro col segno variato* dal $+$ in $-$, o dal $-$ in $+$. Questa *trasposizione*, di cui si fà continuo uso corrisponde, come vedesi, al togliere, o all' aggiungere la medesima quantità in ambedue i *membri*.

Sia in oltre proposta a risolversi *l' equazione*;

$$\frac{3x}{2} - \frac{x}{3} - 4b = \frac{5x}{7} + a - c$$

Qui l' incognita x ha diversi *coefficienti*, diversi *divisori* ed è in ambedue i *membri*. Incomincio dal toglierli tutti i suoi *divisori* moltiplicando tutti i termini dell' *equazione* pel prodotto di questi istessi divisori $2 \times 3 \times 7 = 42$, ed ottengo così;

$$63x - 14x - 168b = 30x + 42a - 42c$$

Trasponendo $30x$ nel primo *membro* ed il $-168b$ nel secondo, e riducendo dipoi in un solo coefficente gli x, avrò;

$$19x = 168b + 42a - 42c$$

Infine dividendo tutta questa equazione per 19 si avrà la *Risolvente*

$$x = \frac{168b + 42a - 42c}{19}$$

Volendo anche in questo esempio verificare la *risolvente*, si sostituisca il precedente valore di x nella *proposta*, ed essa diverrà.

$$\frac{196b+49a-49c}{19}-4b=\frac{120b+30a-30c+a-c}{19}$$

ovvero moltiplicando tutti i termini per 19 avremo;

$$196b+49a-49c-76b=120b+30a-30c+19a-19c$$

E sommando *i termini omogenei* di ciascun membro si ottiene infine l'identità dei due membri;

$$120b+49a-49c=120b+49a-49c$$

49. Quando le incognite sono più che una, le *equazioni di primo grado* risolubili con i principj finora spiegati debbono essere tante, quante sono appunto le *incognite*. Se queste sieno più, o meno delle *equazioni* la loro risoluzione spetta ad altro ramo di Analisi, che sarà trattato a parte più in avanti.

Sieno per tanto *proposte* le due equazioni a due incognite x, y

$$\frac{3x}{5}-7y=a \qquad 4y-\frac{5x}{3}=b$$

Il metodo più generale, e perciò il migliore, di risolverle è quello di ridurre in amendue una delle *incognite* collo stesso *coefficiente*; il che si fà moltiplicando ciascuna *equazione* pel *coefficiente* che l'*incognita da eliminarsi* hà nell'altra. Le *equazioni* così ridotte si sommano, o si sottraggono fra loro, secondo che con l'una, o coll'altra di queste operazioni apparisca, che l'*incognita* collo stesso *coefficiente* si annulli, o (come dicesi) resti *eliminata*. Rimarrà dopo ciò una sola *equazione* con una sola *incognita*, che si risolverà colle solite regole già prescritte.

Vogliasi adunque nelle due *Proposte eliminare* l'*incognita y*: Moltiplico quella posta a sinistra per 4 e l'altra alla destra per 7 numeri ambedue *coefficienti* di y, ed ottengo;

$$\frac{12x}{5} - 28y = 4a$$

$$\frac{-35x}{5} + 28y = 7b$$

La somma è $-\frac{139x}{15} = 4a+7b$ *Equazione* colla sola incognita x, a cui applicando le solite regole, darà *la risolvente*,

$$x = \frac{-60a+105b}{139}$$

Adesso per trovare il valore della y già *eliminata* potrei riprendere le *proposte* equazioni, e collo stesso metodo *eliminare* x, e trovare la *risolvente* per l'*incognita* y. Ma si abbrevia d'assai questo calcolo col sostituire il valore già trovato della x in una qualsivoglia delle *Proposte*. Così sostituendo $\frac{-60a-105b}{139}$ invece della x nella *proposta* $\frac{3x}{5} - 7y = a$ ottengo;

$$-\frac{36a+63b}{139} - 7y = a$$

E trattando questa colle solite regole ne deduco la *risolvente* $y = -\frac{25a+9b}{139}$

Se avessi sostituito lo stesso valore della x nell'altra *Proposta* $4y - \frac{5x}{3} = b$

avrei ottenuto $4y + \frac{100a+175b}{139} = b$

E di qui la stessa *risolvente* $y = -\frac{25a+9b}{139}$

E' visibile che le due *risolventi* si debbono verificare nel modo stesso precedentemente usato; ed infatti sostituendo nelle due *Proposte* i valori di x, e di y dati dalle *risolventi*, ottengo.

$$\frac{-36a-63b+175a+63b}{9}=a$$

$$\frac{-100a-36b+100a+175b}{139}=b$$

Le quali equazioni col poco calcolo che resta a farsi, si trovano avere i loro *membri identici*. La prima cioè si riduce ad $a=a$; la secomda a $b=b$

Questo istesso metodo si adopra per risolvere un numero qualunque di equazioni nelle quali sieno altrettante diverse incognite. Per esercizio degli Studiosi proponiamoci di risolvere le quattro seguenti.

$$2x+6y+z=a$$
$$3x-2y+2t=b$$
$$5x-3z+7t=c$$
$$4y-t+3z=d$$

Prendo primieramente ad *eliminare* la x, e moltiplico perciò la prima *equazione* per $3\times5=15$, la seconda per $2\times5=10$, la terza per $2\times3=6$. Ottengo così tre equazioni in cui la x ha lo stesso coefficiente cioe; $30x+90y+15z=15a$

$$30x-20y+20t=10b$$
$$30x-18z+42t=6c$$

Sottraggo la seconda dalla prima di queste, ed ho

$$110y+15z-20t=15a-10b$$

Sottraggo la terza dalla seconda, ed ho

$$-20y+18z-22t=10b-6c$$

Osservo che la prima delle precedenti è divisibile per 5; la seconda per 2. Eseguite queste divisioni, e portatavi al disotto la quarta delle *proposte* lasciata di sopra, avrò; $22y+3z-4t=3a-2b$

$$-10y+9z-11t=5b-3c$$
$$4y+3z-t=d$$

Dalla prima di queste sottraendo la terza, rimane

$$18y-3t=3a-2b-d$$

Dalla seconda sottraendo la terza moltiplicata per 3, resta $-22y-8t=5b-3c-3d$

Adesso per l' oggetto di eliminare t moltiplico per 8 la prima, e per 4 la seconda di queste ultime *equazioni*, ed ottengo così;

$$144y - 24t = 24a - 16b - 8d$$
$$-66y - 24t = 15b - 9c - 9d$$

E sottraendo avrò; $210y = 24a - 31b + 9c + d$

E quindi la *Risolvente* $y = \frac{24a - 31b + 9c + d}{210}$

Per trovare coll' ajuto di questa *Risolvente* il valore della t prendo l' *equazione* $18y - 3t = 3a - 2b - d$

Vi sostituisco il valore trovato della y, ed essa diviene $\frac{18}{210}(24a - 31b + 9c + d) - 3t = 3a - 2b - d$

Da questa colle note regole deduco la *Risolvente*

$$t = \frac{27c - 33a - 23b + 38d}{105}$$

Per determinare il valore di z prendo l' *equazione*

$$4y - t + 3z = d,$$

e sostituendovi i valori già noti delle *incognite* y, t, avrò primieramente;

$$\frac{2(24a - 31b + 9c + d) - 27c + 33a + 23b - 38d}{105} + 3z = d;$$

E da questa colle note regole la *risolvente*

$$z = \frac{13b + 3c + 47d - 27a}{105}$$

Infine per determinare il valore di x prendo la prima frà le *Proposte* cioè; $2x + 6y + z = a$; e sostituendovi i valori già noti di y, e di z, avrò primieramente;

$$2x + \frac{1}{35}(24a - 31b + 9c + d) + \frac{13b + 3c + 47d - 27a}{105} = a$$

E quindi la *Risolvente* $x = \frac{6a + 8b - 3c - 15d}{21}$

Pertanto dalle quattro *proposte*

$$2x + 6y + z = a$$
$$3x - 2y + 2t = b$$
$$5x - 3z + 7t = c$$
$$4y - t + 3z = d$$

abbiamo dedotte le quattro *Risolventi*

$$x = \frac{6a + 8b - 3c - 5d}{21}$$

$$y = \frac{24a - 31b + 9c + d}{210}$$

$$z = \frac{13b + 3c + 47d - 27a}{105}$$

$$t = \frac{27c - 33a - 23b + 38d}{105}$$

Volendo con queste verificare la risoluzione delle *Proposte*, incomincio dalla prima di esse, e colle opportune sostituzioni ottengo;

$$2x = \frac{12a + 16b - 6c - 10d}{21} = \frac{60a + 80b - 30c - 50d}{105}$$

$$6y = 3\left(\frac{24a - 31b + 9c + d}{105}\right) = \frac{72a - 93b + 27c + 3d}{105}$$

$$z = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{-27a + 13b + 3c + 47d}{105}$$

E sommando sarà $2x + 6y + z = \frac{105a}{105} = a$ come doveva essere.

Parimente facendo le debite sostituzioni nella seconda delle *Proposte* ottengo,

$$3x = \frac{6a + 8b - 3c - 5d}{7}$$

$2t - 2y = -\frac{6a - b + 3c + 5d}{7}$. Adunque sommando sarà;

$$3x - 2y + 2t = \frac{7b}{7} = b$$

Così la terza delle *Proposte* con le opportune sostitu-

zioni diviene $5x = \frac{1}{21}(30a + 40b - 25d - 15c)$

$$7t - 3z = \frac{1}{21}(-30a - 40b + 36c + 25d)$$

E sommando sarà; $5z + 7t - 3z = \frac{21c}{21} = c$

Infine fatte le opportune sostituzioni nell' ultima delle *Proposte* avrò;

$$4y = \frac{1}{105}(48a - 62b + 18c + 2d)$$

$$-t = \frac{1}{105}(33a + 23b - 27c - 38d)$$

$$3z = \frac{1}{105}(-81a + 39b + 9c + 141d)$$

E sommando sarà $4y - t + 3z = \frac{105d}{105} = d)$

Il giro delle operazioni che si è fatto per risolvere le quattro *Proposte* non è già l' unico che debbasi seguire. Queste istesse risoluzioni si possono disporre in moltissimi altri modi; come sarebbe il trovare la prima *risolvente* non già per y, ma per x, ovvero per z, ovvero per t, e cambiare così l' ordine per trovare le altre *Risolventi*. Si può ancora variare a talento le somme, e le sottrazioni fra le *equazioni ridotte*, cioè invece di sommare, o sottrarre la prima colla seconda fare queste istesse operazioni fra la prima, e la terza, fra la prima, e la quarta ec. Con tutte queste variazioni di modo, ma non di metodo, si troveranno sempre gli stessi valori per le incognite, e sarà bene per gli Studiosi che pratichino tali variazioni per acquistare franchezza, ed esattezza nel calcolo.

Il metodo esposto per la risoluzione delle *equazioni* di primo grado a più incognite, come chè basti per se stesso ai problemi, che ordinariamente

occorrono; non è il più generale, ne il più pronto. Avvi altro metodo per mezzo del quale dalle proposte si deducono immediatamente le risolventi senza alcun calcolo intermedio, e di questo metodo sarà trattato allorquando la teorica delle Equazioni sarà applicata alla soluzione dei problemi.

MOLTIPLICA ALGEBRICA

50. E' noto per le cose spiegate finquì che ogni *termine algebrico* è composto di quattro elementi, cioè; Primo. Del segno ± che lo precede; Secondo. Del *Coefficiente*, il quale allorchè non è espresso è l'unità (43). Terzo Delle lettere; Quarto. Degli *esponenti*. La Moltiplica Algebrica esige le seguenti regole per ciascuno di questi elementi

Regola pei Segni. Il segno + nel *moltiplicatore* indica che il *moltiplicando* deve prendersi in *senso positivo*, cioè nel senso medesimo in cui questo si trova. Così se il + 2 ha da moltiplicare il ± 4, il segno + del *moltipticatore* indica che il ± 4 dee prendersi due volte secondo il segno che esso ha; perciò il prodotto sarà ± 8. In generale adunque $+a \times \pm b = \pm ab$.

Il Segno — nel *moltiplicatore* indica che il *moltiplicando* dee prendersi *in senso negàtivo*, cioè in senso opposto a quello in cui esso si trova. Così se il — 5 ha da moltiplicare il ± 6, il segno — del *moltiplicatore* indica che il *moltiplicando* ± 6 deve sommarsi cinque volte in senso opposto a quello che mostrano i suoi segni; dunque il prodotto sarà ∓ 30. Perciò in generale $-a \times \pm b = \mp ab$.

Dopo questo ragionamento si conosce che la regola dei segni consiste nel porre il segno + nel prodotto, quando i *fattori* hanno segni eguali o in +, o in —; e nel porre nel prodotto il segno —.

quando i *fattori* hanno segni diseguali; il che per supplire alla memoria è benissimo espresso in questo dettato latino „ *signa eadem plus, diversa minus*„

Volgarmente si dice + via + fà +; + via — fà —, e — via — fà +; ma queste locuzioni statuite dall' uso sono affatto inesatte, poichè non sono i segni che si moltiplicano, ma sivvero le *quantità*, in cui i segni denotano soltanto l' essere *positivo*, o *negativo* di quelle.

Regola pei coefficienti, e *per le lettere*. Sia da moltiplicarsi $5a$ per b: ciò significa che la quantità b dee moltiplicare il polinomio $a+a+a+a+a$, ed in conseguenza (44) il prodotto sarà $ab+ab+ab+ab+ab=5ab$. Così se debba moltiplicarsi $5a$ per $3b$, ciò significa che il *polinomio* $b+b+b$ dee moltiplicare l' altro *polinomio* $a+a+a+a+a$. Dunque per l' esempio precedente i tre prodotti saranno;

$$b(a+a+a+a+a)=5ab$$
$$b(a+a+a+a+a)=5ab$$
$$b(a+a+a+a+a)=5ab$$

Ed in conseguenza il prodotto totale di $3b\times5a=15ab$

Non è difficile l' estendere questo ragionamento a due qualunque numeri m, n, che sieno *coefficienti* delle quantità da moltiplicarsi, come per esempio $ma\times nb$. Il termine ma è un *polinomio* abbreviato di un numero m di quantità a; così nb è uno abbreviamento del *polinomio* di un numero n di quantità b. Ma $b\times ma=mab$; dunque sommando un numero n di questi prodotti, conforme indica il *moltiplicatore* nb, si avrà $nb\times ma=nmab$. Ecco pertanto dimostrata in generale la regola; *Che i coefficienti dei fattori si moltiplicano come in Aritmetica*, e *che il loro prodotto è il nuovo coefficiente da porsi alle lettere fra loro moltiplicate; cioè come si sà* (44) *scritte di seguito senza alcun segno intermedio.*

Se i coefficienti m, n fossero frazioni la regola rimane la stessa; così $\frac{3a}{4} \times \frac{5b}{7} = \frac{15\,ab}{28}$. Infatti collo stesso raziocinio precedente si argomenta che $\frac{3a}{4} \times 5b = \frac{15ab}{4}$; ma questo prodotto è *sette volte* maggiore del vero, essendo che il *fattore* $5b$ è *sette volte* più grande di $\frac{5b}{7}$; dunque il vero prodotto è $\frac{15ab}{28}$.

Regola per gli esponenti. Secondo l'idea data finquì degli *esponenti*, essi sono numeri intieri, e *positivi*, che colle loro unità mostrano quante volte è ripetuta una quantità nel prodotto per se medesima (43). Adunque siccome $a^5 \times a^3$ indica $aaaaa \times aaa = aaaaaaaa$, sarà $a^5 \times a^3 = a^8$; ed in generale $a^m \times a^n = a^{m+n}$. Pertanto la *moltiplica di una istessa quantità affetta da diversi esponenti si effettua ponendo la somma degli esponenti per nuovo esponente nella quantità medesima.* Questa regola si estende ancora al caso degli *esponenti negativi*, e *frazionari*, ma di questo caso parleremo a suo luogo.

Se le quantità sono diverse, ed abbiano eguali, o diversi esponenti, è visibile che si intenderanno moltiplicate scrivendole di seguito coi loro stessi *esponenti*. Così $a^3 \times b^2 = a^3 b^2$.

Premesse queste regole la *Moltiplica Algebrica* si eseguisce presso a poco come l'Aritmetica. In questa ciascuna cifra del *Moltiplicatore* moltiplica tutte quelle del *Moltiplicando*: nella Algebrica ciascun termine di un *fattore* moltiplica tutti quelli dell'

altro *fattore*. Dipoi se in questi prodotti parziali vi sono quantità *omogenee*, esse si sommano, come appunto si fà dei prodotti parziali Aritmetici.

ESEMPJ

$$\textit{Fattori}\begin{cases} 5a - 2b + c \\ 3a - 4b - 2c \end{cases}$$

Prodotti

per $3a \ldots 15a - 6ab + 3ac$

per $4b \ldots\ldots - 20ab + 8b^2 - 4bc$

per $-2c \ldots\ldots\ldots\ldots - 10ac + 4bc - 2c^2$

Totale $15a - 26ab + 8b^2 - 7ac - 2c^2$

$$\textit{Fattori}\begin{cases} 8a^2 - 5c^3 + 4d \\ -2a^2 - 7c^3 - 3d \end{cases}$$

Prodotti

per $-2a^2 \ldots\ldots - 16a^4 + 10a^2c^3 - 8ad^2$

per $-7c^3 \ldots\ldots - 56a^2c^3 + 35c^6 - 28c^3d$

per $-3d \ldots\ldots\ldots\ldots - 24a^2d^2 + 15c^3d - 12d^2$

Totale $-16a^4 - 46a^2c^3 + 35c^6 - 32ad^2 - 13c^3d - 12d^2$

51. Le quantità espresse da una sola lettera come a, b, c ec, siccome quelle che hanno per *esponente* tacito l' *unità*, si dicono avere una sola *dimensione*; i prodotti di due lettere semplici come

ab, *bc*, *cd*, ec., si dicono quantità di due dimensioni. In generale il numero delle *dimensioni* di un *termine* algebrico si conta dalla somma degli *esponenti* delle sue lettere; $a^4 b^2 c^3$ è un termine di 9 *dimensioni*; $x^m y^t$ è un termine di $m+t$ *dimensioni*.

Dagli esempj precedenti, e da altri che si avranno di moltipliche algebriche si impara; *Che se i termini di ciascun fattore sono tutti delle stesse dimensioni, i termini del prodotto avranno tutti tante dimensioni quanta è la somma delle dimensioni dei termini dei fattori.* Così $(5a^2 + 2ab + bc)$ $(3a^3 - 4ab^2)$ darà un prodotto in cui ciascun *termine* avrà cinque *dimensioni*. L' osservazione sull' omogeneità dei termini del Prodotto relativamente alle *dimensioni dei fattori* è utile a prevenire gli errori di calcolo che si potessero commettere nella moltiplica. Nella risoluzione delle *Equazioni di grado* superiore al primo vedremo altra piu importante utilità, che nasce da questa istessa osservazione.

Del rimanente la parola *dimensione* è stata applicata ai prodotti della quantità alquanto abusivamente, e perciò alcuni Mattematici ritengono il nome di *grado* invece di quello di *dimensione*. Questa prende la sua origine dalla Geometria, la quale considera e calcola le tre *dimensioni* dell' estensione di un corpo. Vi è analogia frà il prodotto di due quantità, e quello della lunghezza per la larghezza da cui resulta la superficie che ha due *dimensioni*: vi è pure analogia fra il prodotto di tre quantità, e quello delle tre *dimensioni*, che costituiscono un corpo, ma poichè le *dimensioni Geometriche* non sono che tre, è assurdo l'ammetterne un

numero maggiore, come si fà nei *prodotti* algebrici. Non ostante, atteso l'uso omai invalso, e considerando d'altronde che il *grado* si riporta direttamente all'*esponente*, crediamo opportuno il ritenere la parola *dimensione* nel senso istesso precedentemente spiegato

52 Nell' eseguire la moltiplica Algebrica può frequentemente succedere che un prodotto di più lettere come $abcd$ venga talvolta coll'ordine alfabetico, talvolta venga $adbc$, talvolta $cbad$, o con qualsivoglia altra permutazione delle stesse lettere Sembra naturale che questi prodotti debbano essere tutti eguali siccome quelli, che composti sono degli istessi elementi, e che perciò sia indifferente qualunque permutazione delle lettere: non ostante vi si può applicare la seguente dimostrazione.

Sia primieramente da dimostrarsi $ab = ba$. Faccio $b = c + 1$, e sostituendo sarà $ac + a = ca + a$. Se non è $ac = ca$ (nel qual caso sarebbe $ab = ba$) faccio $c = d + 1$; e sostituendo avrò $ad + 2a = ad + 2a$ Se voglia ora negarsi $ad = da$ faccio $d = e + 1$, e colla solita sostituzione avrò $ae + 3e = ea + 3a$. Proseguendo così il discorso colle successive ipotesi di $e = f + 1$. $f = g + 1$ ec. ci ridurremo infine ad un ultima quantità $t = s + 1$, nel qual caso l'usata sostituzione darà $a + na = a + na$, posto n quel numero corispondente a tale sostituzione. Questultima *equazione coi membri identici* prova l'equaglianza dei *membri* di tutte le precedenti: dunque $ab = ba$

Se il moltiplicatore b fosse una frazione $\frac{b'}{m}$ si porrebbe $b' = c + 1$, si sostituirebbe $\frac{c+1}{m}$ invece di b, e si farebbe di poi lo stesso ragionamento.

Debbasi in secondo luogo dimostrare che il prodotto abc si mantenga lo stesso per qualunque permutazione fra le sue lettere. Pongo ba invece di ab, già

invece di ab gia dimostrati eguali ed ho . . . $abc = bac$
Pongo cb invece di bc, ed ho parimente . . . $abc = acb$
Pongo nel prodotto bac, il prodotto ca invece di ac, ed ottengo $bac = bca$, ed in conseguenza . . . . . $abc = bca$
Nel prodotto acb pongo ca invece di ac,
ed ho acb ovvero . . . . . , ... $abc = cab$
Nel prodotto bca pongo cb invece di bc
ed ho $bca = cba$ dunque anche . . . . . $abc = cba$

Cessando qui le permutazioni fra tre lettere; se il prodotto ne contenga un numero maggiore come $abcd$, $abcde$ ec. permuto le lettere come sopra a due a due, dipoi a tre a tre, quindi a quattro a quattro ec. e con lo stesso progresso di ragionamento, potrò sempre dimostrare che per qualunque permutazione delle lettere i prodotti restano sempre eguali.

53. Passiamo ad applicare la moltiplica alla dimostrazione, di alcuni importanti teoremi, dai quali apparirà una piccola prova dell' immenso vantaggio dell' Algebra sovra le altre scienze, che adoprano generalmente lunghi ragionamenti, dove questa con brevi, e semplici operazioni riduce le dimostrazioni all' evidenza di fatto. Sieno pertanto proposte le seguenti moltipliche.

I

$$\text{Fattori}\left\{\begin{array}{l} a+b \\ a-b \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rrr} & 2 & \\ a & +ab & 2 \\ & -ab & -b \\ \hline 2 & & 2 \end{array}$$

Prodotto $a - b$

II

$$\text{Fattori}\left\{\begin{array}{l} a \pm b \\ a \pm b \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rrr} & 2 & \\ a & \pm ab & 2 \\ & \pm ab & +b \\ \hline 2 & & 2 \end{array}$$

Prodotto $a \pm 2ab + b$

III

$$\text{Fattori}\begin{cases} a^2 \pm 2ab + b^2 \\ a \pm b \end{cases}$$

$$a^3 \pm 2a^2b + ab^2$$

$$\pm a^2b + 2ab^2 \pm b^3$$

$$\text{Prodotto } a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Dalla I moltiplica resta dimostrato: *Che il prodotto della somma di due quantità per la differenza loro eguaglia la differenza frà i quadrati, cioè le seconde potenze di queste quantità.*

Dalla II resta dimostrato: *Che il quadrato; ovvero seconda potenza del binomio $a \pm b$ eguaglia la somma dei quadrati di queste quantità $\pm$ il doppio prodotto di una pell' altra.*

Dalla III resta dimostrato: *Che il cubo, cioè la terza potenza del binomio $a \pm b$ eguaglia la somma ovvero la differenza dei cubi di queste quantità, $\pm$ il triplo del prodotto del quadrato della prima per la seconda, e di più il triplo del prodotto del quadrato della seconda pella prima.* Peraltro ai *termini* del *cubo* si può dare una forma anche più semplice riflettendo che invece di $\pm 3a^2b + 3ab^2$ si può porre $\pm 3ab\,(a \pm b)$. Così il cubo di un binomio sarà $a^3 \pm 3ab\,(a \pm b) \pm b^3$; cioè *comprenderà i cubi delle quantità che formano il binomio, $\pm$ il triplo del prodotto di queste pel binomio medesimo.* Quindi è che se sia $x = a \pm b$, avremo generalmente l' equa-

zione $x^3 = \pm abx + a^3 \pm b^3$. Resultamento che ha delle applicazioni di sommo rilievo, come vedremo a suo luogo.

54. Considerando la formazione del *quadrato*, e del *cubo* di un *binomio* si vede, che dati due qualunque dei suoi termini si può facilmente trovare il rimanente; il che si dice *compire* il *quadrato*, *compire il cubo*. Ed in quanto al *quadrato*, che (come si sà) contiene tre termini, possono essere dati il primo ed il secondo, ovvero il primo ed il terzo; perocchè il secondo col terzo sono lo stesso caso che il primo col secondo. Debbansi adunque ridurre a *quadrato* perfetto i due termini $a^2 + 2ba$: si vede che il terzo *termine* mancante è il *quadrato* della metà di $2b$ *moltiplicatore* di a. Perciò aggiungendo questo *quadrato* b^2, sarà $a^2 + 2ba + b^2$ il quadrato compito del *binomio* $a+b$. Così $x^2 \mp px$ si riduce *quadrato* perfetto aggiungendovi il *quadrato* della metà di $\mp p$, cioè $\frac{+p^2}{4}$. In tal modo si ottiene $x^2 \mp px + \frac{p^2}{4}$ *quadrato* perfetto del *binomio* $x \mp \frac{p}{2}$.

Che se fossero dati i due termini estremi $a^2 + b^2$ di un *quadrato* imperfetto di un *binomio*, è evidente che il termine mancante sarebbe $2ab$. Così se si volesse compire un *quadrato* cogli estremi $xp^2 + y^2$, il termine mancante sarebbe $2x\sqrt{py}$. Da questi esempj risulta facilmente la regola da tenersi in

ogni caso per rendere completo un *quadrato incompleto*.

Anche il *cubo*, oppure *terza potenza* del *binomio*, non offre grande difficoltà per compirsi allorchè ne sono dati due termini qualunque. Sieno primieramente dati i primi due, come $x^3 + b x^2$. E' chiaro che il *coefficiente* b deve essere il triplo del secondo termine del *binomio* di cui si vuole il *cubo* perfetto: basterà dunque aggiungere $\frac{b x^2}{3} + \frac{b^3}{27}$, acciò $x^3 + b x^2 + \frac{b x^2}{3} + \frac{b^3}{27}$ sia il *cubo* completo del *binomio* $x + \frac{b}{3}$. Similmente se fosser dati i termini primo, e terzo $x^3 + a^2 x$, è chiaro che a deve essere il triplo del quadrato del secondo termine del binomio di cui si ha da compire il cubo: onde è che questo secondo termine sarà $\frac{a}{\sqrt{3}}$. In conseguenza il *cubo* completo sarà, $x^3 + a x^2 \sqrt{3} + a^2 x + \frac{a^3}{3\sqrt{3}}$. Ma qualora si volesse che $x^3 + a^2 x$ fossero il primo, e secondo termine del cubo da compirsi, come nel caso proposto in primo luogo, allora $\frac{a^2}{x}$ dovrebbe essere il triplo del secondo termine del *binomio*, e perciò il suo *cubo* sarebbe compito sotto questa forma $x^3 + a^2 x + \frac{a^4}{3x} + \frac{a^8}{27x^3}$. Sia

inoltre da compirsi un *cubo* di cui sieno dati i termini medj $ax^2 + bx$. E' evidente che il primo termine di questo cubo sarà x^3; per trovare l'ultimo; lo suppongo y^3, e dalla formazione del cubo si sà che deve essere $a = 3y$, $b = 3y^2$. Da queste due *equazioni* ipotetiche deduco $y = \frac{a}{3}$, $y^2 = \frac{b}{3}$. Adunque acciò possa compirsi il *cubo* proposto non debbono esser dati a caso i coefficienti a, b, ma debbono essere tali che sia $a^2 = 3b$. In questa ipotesi il *cubo* perfetto sarà $x^3 + ax^2 + bx + \frac{a^3}{27}$, ovvero $x^3 + ax^2 + bx + b\sqrt{\frac{b}{3}}$, ed ancora $x^3 + ax^2 + bx + \frac{ab}{9}$. Infine se i termini dati fossero gli estremi come $x^3 + c^3$ è visibile che il *cubo* completo sarebbe $x^3 + 3cx^2 + 3cx^2 + c^3$

55. Volendo estendere le *formole* del *quadrato*, e del *cubo* di un *binomio* a queste istesse potenze di un *polinomio* qualunque, si dovrebbe fare la moltiplica di un trinomio $a+b+c$ una e due volte in se medesimo, poi di un quadrinomio $a+b+c+d$, quindi di un *quintinomio* e così di seguito. Ma riescirà molto più facile, e pronto il resultamento di queste istesse moltipliche usando il seguente artifizio.

Il quadrato del binomio $a+b$ è $a^2+2ab+b^2$;

Volendo $(a+b+c)^2$ facciasi $a+b=a'$, e sarà

$(a+b+c)^2=(a'+c)^2=a'^2+2a'c+c^2$

Riponendo $a+b$ invece di a' in questo ultimo resultamento, sarà;

$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2$

Vogliasi in seguito $(a+b+c+d)^2$. Faccio $a+b+c=a''$ e sarà; $(a+b+c+d)^2=(a''+d)^2=a''^2+2a''d+d^2$.

E ponendo $a+b+c$ invece di a'' nell' ultimo resultamento, avremo;

$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2$

Proseguendo in tal guisa a formare il quadrato di un polinomio qualunque $(a+b+c+d\ldots\ldots+t)^2$, si vede che sarà in generale;

$(a+b+c+d\ldots+t)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2\ldots+2(a+b+c+d\ldots+s)t+t^2$

Dalla qual *formola* si impara che; *Il Qaadrato di un polinomio ordinato nella serie dei suoi termini contiene; Il quadrato del primo termine, il doppio prodotto del primo pel secondo ed il quadrato del secondo termine: dipoi il doppio prodotto dei primi due termini pel terzo ed il quadrato del terzo. E successivamente sempre fino all' ultimo termine, il doppio prodotto della somma dei termini precedenti pel susseguente, ed il quadrato del susseguente.*

Lo stesso ragionamento si applica alla formazione del *cubo* di un *polinomio*. Infatti il *cubo* di un *binomio* $a+b$ è $a^3+3ab(a+b)+b^3$: volendo il *cubo* di un *trinomio* $a+d+c$ si ponga $a+b=a'$, ed avremo;

$$(a+b+c)^2=(a'+c)^3=a'^3+3a'c(a'+c)+c^3=a^3+3ab(a+b)+b^3+3c(a+b)(a+b+c)+c^3$$

Collo stesso calcolo si ottiene; $(a+b+c+d)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3+3c(a+b)(a+b+c)+c^3+3d(a+b+c)(a+b+c+d)+d^3$

Ed in generale;

$$(a+b+c+d\ldots+t)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3+3c(a+b)(a+b+c)+c^3+3d(a+b+c)(a+b+c+d)+d^3\ldots\ldots+3t(a+b+c+d\ldots+s)(a+b+c+d\ldots+t)+t^3$$

Adunque il *cubo* di un polinomio ordinato per la serie dei suoi termini contiene; *Il cubo del primo termine, il triplo del prodotto dei primi due termini moltiplicato per la loro somma, ed il cubo del secondo termine*: dipoi il triplo del prodotto del terzo *termine per la somma dei primi due moltiplicato per la somma di tutti i tre, ed il cubo del terzo termine. E quindi successivameute sempre il triplo del prodotto del termine susseguente per la somma dei precedenti, e per la somma di questi col susseguente; poi il cubo del susseguente, e così fino all' ultimo termine pel polinomio.*

Se si prenda il *cubo* del binomio espresso nella sua forma primitiva $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, si potrà dedurre dalla *formola* istessa trovata qui sopra la serie analoga dei termini del cubo di un polinomio qualunque. Riprendo pertanto la citata formola

$$(a+b+c\ldots\ldots t)^3 = a^3+3ab(a+b)+b^3+3c(a+b)$$
$$(a+b+c)^3+c\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+3t(a+b+c\ldots\ldots+s)(a+b+c\ldots\ldots+t)+t^3$$

Eseguisco la moltiplica accennata con le parentesi, badando a lasciare accennati soltanto i prodotti dei quadrati che nascono da tale moltiplica. Così ottengo prontamente;

$$(a+b+c\ldots\ldots+t)^3 = a^3+3ab^2+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c$$
$$+3c^2(a+b)+c^3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+3(a+b+c\ldots\ldots+s)^2t+3(a+b+c\ldots\ldots+s)t^2+t^3$$

In questo aspetto il cubo di un polinomio contiene; *Il cubo del primo termine, il triplo prodotto del quadrato del primo pel secondo; il triplo prodotto del quadrato del secondo pel primo; ed il cubo del secondo. Dipoi il triplo prodotto del quadrato dei primi due termini pel terzo il triplo prodotto del quadrato del terzo pei primi due, ed il cubo del terzo. E successivamente sempre il triplo prodotto del quadrato dei termini precedenti pel susseguente, il triplo prodotto del quadrato del susseguente per tutti i precedenti; ed il cubo del susseguente, finchè questo non sia l'ultimo termine.*

DIVISIONE ALGEBRICA

56. Questa operazione per lo più non si effettua se non quando il *Divisore è submultiplo del Dividendo*, o almeno di una parte dei suoi termini. Negli altricasi la divisione si accenna a foggia di rotto come $\frac{a}{b}$, $\frac{c-d}{a+b}$, $\frac{m-b}{r-a}$. La *Divisione* si accenna ancora scrivendo (7) $a : b$, $c-d : a+b$, ma questo modo non è troppo usato in questo senso. Esso ha un significato esteso oltre la semplice idea della divisione, che sarà spiegato a suo luogo.

Essendo proprio della *divisione* che il *quoto* moltiplicato pel *divisore* debba produrre il *dividendo* (19), le regole per eseguire la *divisione Algebrica* si dedurranno tutte da questo principio, più tosto che da dimostrazioni dirette.

Incominciando adunque dai *segni*; siccome $+a \times \pm b = \pm ab$, così $\frac{\pm ab}{+a} = \pm b$. Perciò (usando il volgare linguaggio) il $+$ nel $+$ stà $+$; il $\pm$ nel $-$ stà $-$. Parimente siccome $-a \times \pm b = \mp ab$, avremo $\frac{\mp ab}{-a} = \pm b$; cioè il $-$ nel $-$ stà $+$, ed il $-$ nel $+$ stà $-$. Abbiamo pertanto nella *Divisione* rispetto ai segni la stessa regola della *Moltiplica; signa eadem plus, diversa minus.*

Regola pei coefficienti, e per le lettere. Poichè nella *moltiplica* abbiamo $4a \times 5b = 20\,ab$, sarà nella *Divisione* $\frac{20\,ab}{5b} = 4\,a$. Da questo esempio, che si può estendere a qualunque altro si vede, *che nella Divisione algebrica i coefficienti si dividono come in Aritmetica, e le lettere comuni al divisore ed al*

dividendo si cancellano nel quoto; ritenendo in questo quelle lettere che sono nel dividendo, e non nel divisore.

Regola per gli Esponenti. Nella *moltiplica* $ab^3 \times a^5b^2 = a^8b^3$ dunque nella *divisione* $\frac{a^8b^3}{a^5b^2} = a^3b$ Cioè *nella divisione gli esponenti posti alla stessa lettera si sottraggono, e nel quoto si pone la lettera istessa coll' esponente eguale alla differenza fra gli esponenti, che essa aveva nel dividendo, e nel divisore.*

Premesse queste regole la *divisione* si eseguisce in Algebra presso a poco come in Arimetica *la Divisione maggiore.* Bisogna però avvertire di disporre i termini del *divisore*, e del *dividendo* in modo che gli *esponenti* della stessa lettera diminuiscano gradatamente da sinistra verso la destra: questo è ciò che si dice *ordinare un polinomio.* Ecco alcuni esempj della *Divisione* così *ordinata.*

Divisore

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^3 - 3ab^2 + 3ab^2 - b^3}$$

Quoto $a - 3ab + 3ab^2 - b^3$

$$\frac{+3ab^4 - b^5}{a^2 - 2ba + b^3}$$

Dividendo

$$a^5 - 5ab^4 + 10ab^3 - 10ab^2 + 8ab^4 - 2b^5$$

$$\frac{a^5 - 2ab^4 + ab^3}{-3ab^4 + 9ab^3 - 10ab^2}$$

$$\frac{-3ab^4 + 6ab^3 - 3ab^2}{}$$

Differenza delle quantità di retro

$$\begin{array}{l}
\quad 3\,2 \qquad 2\,3 \qquad 4 \\
+3ab - 7ab + 8ab \\
\quad 3\,2 \qquad 2\,3 \qquad 4 \\
+3ab - 6ab + 3ab \\
\hline
\qquad\qquad 2\,3 \qquad 4 \qquad 5 \\
\qquad -ab + 5ab - 2b \\
\qquad\quad 2\,3 \qquad 4 \qquad 5 \\
\qquad -ab + 2ab - b \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 4 \quad 5 \\
\text{Avanzo} \ldots\ldots + 3ab - b
\end{array}$$

Dividendo

$$\begin{array}{l}
\quad 5 \quad 5 \\
a + m \\
\quad 5 \quad 4 \\
a + am \\
\hline
\qquad 4 \\
\quad -am \\
\qquad 4 \qquad 3\,2 \\
\quad -am - am \\
\hline
\qquad\qquad 3\,2 \\
\qquad\quad +am \\
\qquad\qquad 3\,2 \qquad 2\,3 \\
\qquad\quad +am + am \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 2\,3 \\
\qquad\qquad\quad -am \\
\qquad\qquad\quad 2\,3 \qquad 4 \\
\qquad\qquad\quad -am - am \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 4 \quad 5 \\
\qquad\qquad\qquad\quad +am + m \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 4 \quad 5 \\
\qquad\qquad\qquad\quad +am + m \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Avanzo} \ldots\ldots 0
\end{array}$$

Divisore

$$\begin{array}{l}
a + m \\
\hline
\quad 4 \qquad 3 \qquad 2\,2 \qquad 3 \qquad 4 \\
\text{Quoto } a - am + am - am + m
\end{array}$$

Quantunque la *Divisione* Algebrica raramente si adoperi quando il *Divisore* non è *submultiplo* del *dividendo*, ne daremo pure l'esempio che segue.

Divisore $a+b$ | *Dividendo* m

$$\text{Quoto } \frac{m}{a} - \frac{bm}{a^2} + \frac{b^2 m}{a^3}$$

$$m + \frac{bm}{a}$$

$$-\frac{bm}{a}$$

$$-\frac{bm}{a} - \frac{b^2 m}{a^2}$$

$$+\frac{b^2 m}{a^2}$$

$$+\frac{b^2 m}{a^2} + \frac{b^3 m}{a^3}$$

$$\text{Resto} \ldots\ldots -\frac{b^3 m}{a^3}$$

Senza progredire oltre il resto $\frac{b^3 m}{a^3}$ si vede in questo caso di *divisione* che il *quoto* è una serie infinita di termini di cui è facile conoscere la legge; onde è che tutta questa operazione può mettersi sotto la forma della seguente equazione;

$$\frac{m}{a+b} = m\left(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} \ldots\ldots \pm \frac{b^n}{a^{n+1}}\right)$$

nella qual formola intendesi coll' esponente n un numero qualunque ultimo della serie 1, 2, 3 4 ec. ed il segno $+$ dovrà porsi se questo numero è pari, il segno $-$ se è dispari.

57. Ripiglio a considerare il secondo esempio di divisione $a^5 + m^5$ dal quale si è avuto il *quoto* $a^3 - a^2 m^2 + a^3 m^4 - m$ senza avanzo. Se questa istessa divisione si facesse nell' esempio analogo di $\frac{x^m - 1}{x - 1}$, si troverebbe il *quoto* parimente senza avanzo $x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} \ldots\ldots + x + 1$, semprechè l' esponente m sia numero intiero, e *positivo*. Dividendo altresì $x^m - 1$ per $x - a$ si avrebbe il quoto $x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2 x^{m-3} \ldots\ldots + a^{m-1} x$ coll' avanzo $a^m - 1$. Si troverebbe ancora $\frac{x^m - 1}{x - a^2} = x^{m-1} + a^2 x^{m-2} + a^4 x^{m-3} \ldots\ldots + a^{2m-1} x$ coll' avanzo $a^{2m} - 1$. E seguitando a dividere lo stesso *binomio* $x^m - 1$ per $x - a^3$, $x - a^4 \ldots\ldots x - a^{m-1}$ si troverebbero i *quoti* analoghi ai precedenti cogli avanzi $a^{3m} - 1$, $a^{4m} - 1 \ldots\ldots a^{(m-1)m} - 1$. Supponendo adesso $a = 1$ l' avanzo della divisione $\frac{x^{m-1}}{x - a}$ è *zero*; e perciò, $x - a$ è in questa ipotesi *submul-*

tiplo del *binomio* $x^m - 1$. Ma se $\alpha^m = 1$, anche $\alpha^{2m} = 1^2 = 1$, $\alpha^{3m} = 1^3 = 1$, $\alpha^{4m} = 1^4 = 1 \ldots \alpha^{(m-1)m} = 1^{m-1} = 1$; dunque la prima ipotesi di $\alpha^m = 1$ rende *zero* tutti gli avanzi $\alpha^{2m} - 1$, $\alpha^{3m} - 1 \ldots \alpha^{(m-1)m} - 1$; e così $x - \alpha$, $x - \alpha^2$, $x - \alpha^3 \ldots x - \alpha^{m-1}$ sono tutti *submultipli* di $x^m - 1$. Ora siccome risulta dall' *esponente* m, il binomio $x^m - 1$ ha un numero m di *dimensioni*; perciò i suoi *fattori* semplici di una sola *dimensione*, o dir vogliansi di *primo grado*, sono m: Dunque incominciando dal *fattore* $x - 1$, gli altri saranno $x - \alpha$, $x - \alpha^2$, $x - \alpha^3 \ldots\ldots x - \alpha^{m-1}$. Pertanto se oltre il fattore $x - 1$ se ne trova un altro $x - \alpha$ *submultiplo* del binomio $x^m - 1$ avremo in generale;

$$x^m - 1 = (x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^3)\ldots(x-\alpha^{m-1})$$

Si osservi ancora che essendo $\frac{x^m - 1}{x - 1} = x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} \ldots \ldots + x + 1$, la serie dei termini del secondo membro di questa *equazione* è la stessa di quella delle quantità unite ad x nel secondo membro della precedente, cioè $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^{m-1}$, soltanto che si cangi x in α.

Le conclusioni ottenute dal precedente ragionamento hanno delle applicazioni di somme rilievo, come vedremo a suo luogo.

58. Nell' eseguire la *divisione* algebrica succedono alcuni casi, che molto interessa di esaminare:

Si sà che in generale $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ Supponiamo gli *esponenti* m, n numeri intieri e positivi; può avvenire che sia $m > n$, che sia $m = n$, che sia $m < n$. Nel primo caso il *quoto* a^{m-n} non offre difficoltà: nel secondo caso $\frac{a^m}{a^n} = a^o$, nel terzo caso $\frac{a^m}{a^n} = a^{-d}$; chiamata d la differenza fra i numeri m, n. Dunque l'*esponente zero* occorre quando una quantità divide se medesima, ma in questo caso il *quoto* è evidentemente l'*unità*, perciò $a^o = 1$, e così $(bd)^o = 1$ $(c^2 - a)^o = 1$, *e qualsivoglia altra quantità coll'esponente zero sarà sempre eguale all' unità.* Esaminando il terzo caso in cui si è supposto $n = m + d$; se si sostituisca $m + d$ invece di n sarà $\frac{a^m}{a^{m+d}} = a^{-d}$; ma $\frac{a^m}{a^{m+d}} = \frac{a^m}{a^m \times a^d} = \frac{1}{a^d}$; dunque $a^{-d} = \frac{1}{a^d}$. Dalchè si rileva *che la quantità coll' esponente negativo è una frazione, il di cui numeratore è l'unità, ed il denominatore è la stessa quantità coll' esponente istesso positivo.*

59. Finora non sappiamo altro modo di esprimere in generale la radice m^{sima} di una qualunque quantità b; se non che scrivendo $\sqrt[m]{b}$, (7)

Ma il segno $\sqrt[m]{}$ è una espressione assoluta, che non presta per se medesima alcun mezzo al calcolo. Se però si considera che $\sqrt[m]{b}$ rappresenta quella quantità, che moltiplicata in se stessa m volte produce b, e se conseguentemente si rifletta che questa moltiplica si fà colla somma degli esponenti (50), e che la somma di m frazioni $\frac{1}{m}$ è l'unica da cui resulti il totale 1, ci convinceremo facilmente che $b^{\frac{1}{m}}$ è un *simbolo algebrico* attissimo ad esprimere la *radice m.sima* di una qualunque quantità b. Adunque l'*esponente frazionario*, di cui direttamente non potremmo spiegare l'origine, esprime esattamente col suo denominatore il grado della *radice* da estrarsi, ed è in oltre soggetto al calcolo nel modo istesso degli altri esponenti. Le quantità espresse sotto la forma $\sqrt[m]{b}$, ovvero $b^{\frac{1}{m}}$; come pure $\sqrt[m]{a+b}$, ovvero $(a+b)^{\frac{1}{m}}$ e simili, si dicono *radicali*, ed hanno il loro particolare Algoritmo, che sarà spiegato più in avanti.

60. La divisione accennata $\frac{a-x}{b-y}$ offre due casi degni di somma considerazione nella ipotesi che le due quantità a, b, e le altre due x, y possano avere diversi valori, cioè sieno (come dicesi) *variabili*. Consideriamo primieramente il caso in cui sia *variabile* la sola y. Allorchè questa è minore di b

la *divisione* $\frac{a-x}{b-y}$ darà un *quoto positivo*; quando $y > b$ il *quoto* sarà *negativo*; ed infine se $y = b$ avremo $\frac{a-x}{b-y} = \frac{a-x}{o}$. Parrebbe in questo ultimo caso che interpetrando il *divisore zero* come *annullamento* di *quantità*, il *quoto* dovesse ridursi al *numeratore* $a-x$: Ma riflettendo più sottilmente sulla *variabilità* della quantità y è visibile, che quanto più ella crescendo si accosta alla grandezza b, tanto più scema la differenza $b-y$; per lo chè il *quoto* $\frac{a-x}{b-y}$ anderà gradatamente crescendo, finchè quando $b-y$ sarà una differenza *minima*, il *quoto* precedente diverrà *massimo*. Ora non essendovi alcun numero che possa esprimere una differenza *minima*, e viceversa una quantità *massima*, i Matematici adoprano in simili casi il *zero* per rappresentare la prima, e le espressioni $\frac{a-x}{o}$, $\frac{m}{o}$ e simili per rappresentare la seconda. Perciò bisogna qui intendere il *zero* non nel suo senso assoluto di *annullamento di quantità*, ma come un *limite* del decremento di una differenza, al quale cioè questa *differenza*, per quanto si supponga piccola non potrà mai giungere; e conseguentemente a questo principio qualunque quantità divisa per *zero* è un simbolo che rappresenta un *quoto massimo*, che dicesi ancora l' *infinito*. Si intende ancora da questo esempio che, *acciò una quantità positiva divenga negativa, e viceversa, deve ella passare per l' infinito, o per zero*. Infatti la quantità $b-y$, *positiva* finchè sia $b > y$, diviene *negativa* allorchè $y > b$: ma fra i decrementi successivi della differenza $b-y$ bisogna passare necessariamente per quello in cui $b-y = o$; dunque il *zero* è in *limite* tra lo stato *positivo*, ed il *ne-*

gativo di una *quantità variabile*. E parimente il *quoto* $\frac{a-x}{b-y}$, *positivo* finchè sia $b > y$, diviene *infinito* quando $b-y=o$, e dopo questo *limite*, crescendo y sopra b, lo stesso quoto diviene *negativo*. Dunque anche l'*infinito* è il *limite*, tra lo stato *positivo*, e *negativo* della *quantità variabile*.

Passiamo adesso al caso, in cui sono x, y *variabili* amendue. Se $a=x$, $b=y$, avremo $\frac{a-x}{b-y}=\frac{o}{o}$. Prendendo il significato dello *zero* nel senso precedentemente spiegato si potrà intendere che il *quoto* $\frac{o}{o}$ è quantità reale, sebbene *indeterminata*, perchè una quantità *minima* divisa per altra quantità *minima* dà un *quoto* inassegnabile, è vero, ma pure esistente. Talvolta però questo *quoto* è *determinato*, e ciò succede sempre quando i termini del *rotto* hanno qualche *fattore* comune, il quale diventando *zero* gli renda ambedue eguali a *zero*. Sopprimendo allora questo comune fattore (conforme si può (24)) si ottiene il vero quoto della *divisione* proposta. Sia per esempio $\frac{a(a^2-x^2)}{b(a-x)}$: questa quantità diviene $\frac{o}{o}$ allorchè $x=a$; ma soppresso il fattore $a-x$ comune al *dividendo*, ed al *divisore*, resta il suo vero valore $\frac{a(a+x)}{b}$. Vi sono ancora molti altri casi, in cui $\frac{o}{o}$ ha un *quoto* assegnabile, e pei quali non basta il metodo precedente, ma vi occorre altra teorica, che qui non può trattarsi.

FRAZIONI ALGEBRICHE

61. Le *frazioni* Algebriche hanno origine come le numeriche dagli avanzi delle divisioni, ovvero sono *divisioni accennate* perche ineseguibili. Hanno inoltre queste *frazioni*, per la ragione medesima delle numeriche, la proprietà di mantenere il loro valore, qualora per una medesima quantità, o per quantità eguali si dividano, o si moltiplichino ambedue i *termini* loro. Di qui nasce come in Aritmetica il modo di ridurle allo stesso *denominatore*, ed ai suoi *minimi termini*, ovvero (come dicesi) di *schisarle*. Ma la *riduzione ai minimi termini* esige nelle *frazioni* algebriche alcune particolari avvertenze.

Non potendosi assegnare nell' Algebra la relazione fra le grandezze componenti i polinomj bisogna intendere pel massimo loro *submultiplo* quello che ha più dimensioni (51), ovvero quello che contiene un numero maggiore di termini. Si determina questo *submultiplo* come in Aritmetica (25) considerando, che *qualunque divisore esatto comune a due quantità dee dividere ancora il resto della loro divisione*. Sieno infatti A, B due quantità qualunque, delle quali si debba trovare un comune *submultiplo*: sia q il *quoto* di $\frac{A}{B}$, ed r l'avanzo di tal divisione. Avremo evidentemente $A = Bq + r$, e se B, ed r hanno un comune *submultiplo* questo dovrà pure dividere esattamente A altrimenti l'equazione precedente divisa per questo *submultiplo* avrebbe nel primo membro quantità frazionarie, e non le avrebbe nel secondo, il che è assurdo. Per trovare questo *submultiplo* comune alle quantità B, r, divido B per r, e chiamando q' il *quoto*, ed r' l'avanzo se vi è, avrò $B = rq' + r'$, il qual valore

sostituito nella precedente equazione dà $A = q(rq' + r') + r'$. Perciò se r' e *submultiplo* di r lo sarà pure di B, e di A. Se non lo è si seguiti a dividere ciascun avanzo precedente $r^{(n-1)}$ pel successivo $r^{(n)}$, finchè si trovi un qualche $r^{(n)}$ submultiplo di $r^{(n-1)}$; è chiaro che $r^{(n)}$ sarà *submultiplo* comune a tutti gli avanzi ottenuti fino da principio, ed in conseguenza ancora alle quantità A, B.

Per eseguire con successo questa continua divisione nei *polinomj* Algebrici a fine di trovarne il *massimo comune submultiplo* conviene attendere diligentemente a questo principio. *Se due polinomj hanno un submultiplo comune, questo rimane lo stesso se tolgasi un fattore dell' uno non comune all' altro polinomio, ed ancora se si moltiplica uno dei polinomj per una qualunque quantità, che non sia un fattore dell' altro polinomio.* Prendiamo in esempio la frazione $\frac{3a^3 - 4a^2b - 9ab^2 - 18b^3}{5a^2b - 18ab^2 + 9b^3}$, la quale debba ridursi ai suoi *minimi termini* coi principj stabiliti di sopra. Osservo che il *denominatore* ha il fattore b non comune a tutti i termini del *numeratore*, perciò ponendo questa istessa *frazione* sotto la nuova forma

$$\frac{3a^3 + 4a^2b - 9ab^2 - 28b^3}{b(5a^2 - 18ab + 9b^2)}$$

si vede che può rigettarsi il fattore b, e ricercare il comune submultiplo fra i termini del rotto

$$\frac{5a^3 - 4a^2b - 9ab^2 - 18b^3}{5a^2 - 18ab + 9b^2}$$

Ma per fare la divisione del *numeratore* pel *denominatore* si presenta la difficoltà che $5a^2$ non può dividere $3a^3$, e non può aversi perciò almeno un *quoto parziale* intiero. A questo oggetto moltiplico il *numeratore* per 5, che non è suo fattore, e non influisce in conseguenza sul *comune submultiplo*. Ottengo così $\frac{15a^3 - 20a^2b - 45ab^2 - 90b^3}{5a^2 - 18ab + 9b^2}$; e fatta la *divisione* così accennata, trovo il *quoto* $3a$, e l'avanzo $34a^2b - 72ab^2 - 90b^3$. Da questo avanzo tolgo il *fattore* $2b$ che non è comune al *divisore* precedente, e deduco da cio, che il *comune submultiplo* ricercato dee ritrovarsi fra i termini della frazione $\frac{5a^2 - 18ab + 9b^2}{17a^2 - 36ab - 45b^2}$

Acciò ancor quì riesca la *divisione* accennata, moltiplico il *numeratore* per 17 che non è suo *fattore*, e fatta dopo ciò la *divisione* ottengo il *quoto* 5, e l'avanzo $-126ab^2 + 378b^3$. Rigetto in questo il *fattore* $-126b^2$ non comune al *divisore* precedente; ed in conseguenza il *comune submultiplo* dovrà trovarsi fra i termini della frazione $\frac{17a^2 - 36ab - 45b^2}{a - 3b}$

Eseguita la divisione il quoto è $17a$, e l'avanzo

$15ab^2 - 45b^3$, dal quale tolto il *fattore* $15b$ non comune al precedente *divisore*; resta $a - 3b$, che divide esattamente lo stesso $a - 3b$, *divisore* precedente. Adunque $a - 3b$ sarà il *comune submultiplo* che ridurrà ai *minimi termini* la *frazione* proposta in principio, come con la *divisione* per $a - 3b$ se ne può avere una sicura riprova; e si troverà

$$\frac{3a^3 - 4ab^2 - 9a^2b - 18b^3}{5a^2b - 18ab^2 + 9b^3}$$

$$= \frac{(3a^2 + 5ab^2 + 6b^2)(a - 3b)}{(5ab - 3b^2)(a - 3b)} = \frac{3a^2 + 5ab^2 + 6b^2}{5ab - 3b^2}$$

62. Il metodo di sommare, sottrarre, moltiplicare, e dividere le *frazioni Algebriche* non differisce da quello già usato per le numeriche (21), e si appoggia sulle stesse dimostrazioni. Tralasceremo perciò di ripeterle, e recheremo soltanto gli esempj di queste operazioni, additando in succinto il processo del calcolo. Sieno pertanto da sommarsi le *frazioni*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \frac{m}{n}$$

Le riduco allo stesso *denominatore*, ed ottengo

$$\frac{adfn}{bdfn} + \frac{cbfn}{bdfn} + \frac{ebdn}{bdfn} + \frac{mbdf}{bdfn}$$

Pongo il comune *denominatore* $bdfn$ sotto la somma dei *numeratori*, ed ho infine;

$$\frac{adfn + cbfn + ebdn + mbdf}{bdfn}$$, che è la somma ricercata.

Sieno da sottrarsi i rotti $\frac{x}{y}$, $\frac{m}{h}$. Gli riduco allo stesso *denominatore*, e supponendo che vogliasi

la differenza fra il primo, ed il secondo, ottengo;

$$\frac{hx}{hy} - \frac{my}{hy}$$

Pongo il comune *denominatore* hy sotto la differenza dei *numeratori*, ed ottengo infine $\frac{hx - my}{hy}$, differenza cercata.

Così se debbasi moltiplicare $a \times \frac{b}{c}$, argomentando come nei rotti numerici (29) è visibile, che il prodotto sarà $\frac{ab}{c}$. E parimente il prodotto di $\frac{a}{m} \times \frac{b}{h}$ sarà $\frac{ab}{mh}$

Finalmente per la *divisione* si faccia lo stesso ragionamento applicato ai rotti numerici (30), e si intenderà facilmente che $a : \frac{b}{c}$ è lo stesso che $\frac{a}{1} : \frac{b}{c}$; ovvero $ca : b$. Dunque il quoto è $\frac{b}{ca}$.

Si intenderà ancora che $\frac{m}{t} : \frac{h}{x}$ è lo stesso che $mx : ht$. Onde il *quoto* sarà $\frac{ht}{mx}$.

Quantità Radicali, ed Immaginarie.

63. Le quantità *radicali* dette anche semplicemente i *Radicali* si esprimono con èsattezza applicandovi l'*esponente frazionario*, il di cui denominatore denota il grado della *radice* da estrarsi (59). Da questo principio si deducono chiaramente le regole del Calcolo di tali quantità, ma conviene inoltre dare qualche ulteriore illustrazione sulla natura degli *esponenti*.

La moltiplica dell'*esponente* per altra quantità intiera m indica l'elevazione alla potenza m. Infatti

a^{mn} è lo stesso che $a^{n+n+n\ldots\ldots}$ fino ad un numero m di esponenti n; ma questo istesso prodotto può porsi sotto la forma $a^n . a^n . a^n \ldots\ldots$ fino ad un numero m di quantità a^n (50), e sotto questa forma viene espressa appunto la potenza m della quantità a^n (5); dunque a^{mn} significa la potenza m di a^n.

Viceversa a^{mn} può anche significare la potenza n di a^m, usando lo stesso ragionamento rispetto al moltiplicatore n. Siegue da ciò, che $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\ldots}$ prolungando la somma delle frazioni $\frac{1}{n}$ fino al numero m esprimerà la potenza m del radicale $a^{\frac{1}{n}}$; o viceversa siccome $a^{\frac{m}{n}}$ diventa a^m se si fà il prodotto $a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}\ldots\ldots}$ fino ad un numero n di frazioni $\frac{m}{n}$ la stessa quantità $a^{\frac{m}{n}}$ esprimerà la radice n sima della quantità a^m. Pertanto quando $\frac{m}{n} = q$ numero intiero, il *radicale* $a^{\frac{m}{n}}$ avrà la sua radice esatta a^q. In questo caso il *radicale* dicesi commensurabile, ed anche *razionale*. Se poi $\frac{m}{n}$ è una *frazione propria*, il *radi-*

cale $a^{\frac{m}{n}}$ esprimerà una *radice* impossibile ad ottenersi esattamente; onde è che in questo caso il *radicale* istesso dicesi *incommensurabile*, ed anche *irrazionale*. Infine se la frazione $\frac{m}{n}$ è *impropria*, ed abbiasi in conseguenza $\frac{m}{n} = q + \frac{r}{n}$, sarà il *radicale* $a^{\frac{m}{n}} = a^{q+\frac{r}{n}} = a^q . a^{\frac{r}{n}} = a^q \sqrt[n]{a^r}$, risultamento in parte *razionale*, ed in parte *incommensurabile*.

64. Il prodotto $a^m b^m$ è lo stesso che $(ab)^m$; ed il prodotto $a^n b^n$, posto $m = n \pm d$, equivale al prodotto $(ab)^n \times a^{\pm d}$. Sieno primieramente m, n due numeri intieri; la prima proposizione resta dimostrata osservando che $(ab)^m = ab \times ab \times ab \ldots\ldots$ fino ad un numero m di quantità ab; e siccome il prodotto è sempre lo stesso qualunque sia la traslocazione delle lettere (52), se ponganisi da se tutte le a, dipoi tutti i b, è evidente che risulterà $(ab)^m = a^m b^m$. Lo stesso discorso dimostra ancora la seconda proposizione.

Se m, n fossero due frazioni si riducano allo stesso denominatore p. E primieramente siccome le radici di grado eguale delle quantità eguali debbono essere eguali (48) non vi ha dubbio che $\sqrt[p]{a^m . b^m} = \sqrt[p]{(ab)^m}$; ovvero ponendo gli *esponenti*

fratti invece dei *segni radicali* sarà $a^{\frac{m}{p}} \cdot b^{\frac{n}{p}} = (ab)^{\frac{m}{p}}$.

Così per la medesima ragione $a^{\frac{n}{p}} \cdot b^{\frac{n}{p}} = (ab)^{\frac{n}{p}} \times a^{\frac{d}{p}}$.

Suppongasi infine $a = b$, avremo $a^{\frac{m}{p}} \cdot a^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{2m}{p}}$.

E perchè $\sqrt[p]{a^m} \cdot a^n = \sqrt[p]{a^{m+n}}$ avremo ancora $a^{\frac{m}{p}} \cdot a^{\frac{n}{p}} = a^{\frac{m+n}{p}}$. Questi ultimi risultamenti dimostrano che la moltiplica di una istessa lettera con diversi *esponenti frazionari dello stesso denominatore* si fà con la *somma di questi esponenti*, come appunto si opera quando gli *esponenti*, sono intieri (50).

65. L'Algoritmo dei *radicali* in quanto alla *somma*, ed alla *sottrazione* ha le istesse regole usate per le altre quantità Algebriche. Siccome queste operazioni risguardano la riduzione dei *coefficienti* delle quantità *omogenee* ad un solo coefficiente (46, e 47), nulla vi influisce *l' esponente* o intiero, o frazionario che sia. Avremo adunque;

$$5\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{ab} + 4\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{ab} = 9\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{ab}$$

$$8a^{\frac{1}{3}} + 3\sqrt[3]{c} - 5a^{\frac{1}{3}} - 7c^{\frac{1}{2}} = 3a^{\frac{1}{3}} - 4c^{\frac{1}{2}}.$$

Ed in egual modo si formerà facilmente la riduzione dei *coefficienti* in qualunque altro caso di *somma*, o *sottrazione* dei *radicali omogenei*.

Ma la riduzione dei *radicali* alla espressione più semplice, la loro *moltiplica*, e la *divisione* loro sono tre operazioni dipendenti dai principj qui so-

pra esposti. Incominciando adunque dalla prima, debba ridursi alla più *semplice espressione* il radicale

$$\sqrt[5]{(160\,a^5\,b^8\,c^{13})}$$

Divido per 5 ciascuno degli *esponenti* delle quantità sotto il segno, e questo radicale diverrà trasformato

$$\text{così (64)}; \quad 160\,abc^{\frac{1}{5}} \times b^{\frac{3}{5}}\,c^{\frac{3}{5}}$$

Riguardo al numero 160 considero, se fra i *submultipli* di 160 vi sia alcuna quinta potenza esatta; e poiche il 2 può dividere cinque volte di seguito il 160, ottengo $160 = 2^5 . 5$; perciò $160 = 2 . 5^{\frac{1}{5}}$. Con la sostituzione di questo valore avrò infine

$$\sqrt[5]{160\,a^5\,b^8\,c^{13}} = 2abc\sqrt[5]{(5b^3\,c^3)}$$

Dopo questo esempio è facile intendere la riduzione dei radicali negli esempj seguenti.

$$\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{3}{2}} = (a+b)(a+b)^{\frac{1}{2}} = (a+b)\sqrt{a+b}$$

$$\sqrt[3]{(80a^6b + 48a^4c^6)} = \sqrt[3]{(2a^3(10ab^3 + 6ac^6)} =$$

$$2a\sqrt[3]{(2a^2(5ab^3 + 3c^6))}$$

Passando alla *moltiplica* dei *radicali* se ci rammentiamo dei principj stabiliti ai paragrafi 63, 64, potremo facilmente apprenderne la esecuzione negli esempj che seguono.

Sia per primo esempio da moltiplicarsi $(a + \sqrt{a} - \sqrt[3]{a+b})(2a - \sqrt{a} + 2\sqrt[3]{a+b})$. Sostituisco gli

esponenti fratti ai segni radicali, e forme così i seguenti *fattori*, dei quali eseguisce la *moltiplica* colle solite regole (50).

$$a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}} - (a+b)$$

$$2a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{3}} + 2(a+b)$$

$$2a^{2} + 2a^{\frac{3}{2}} - 2a^{\frac{1}{3}}(a+b)$$

$$-a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}}(a+b)$$

$$+2a^{\frac{1}{3}}(a+b) + 2a^{\frac{1}{2}}(a+b) - 2(a+b)^{\frac{2}{3}}$$

Prodotto $2a^{2} + a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}} + 3a^{\frac{1}{3}}(a+b) - 2(a+b)^{\frac{2}{3}}$.

Il termine $3a^{\frac{1}{3}}(a+b)$ può porsi sotto altra forma riducendo allo stesso *denominatore i rotti* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.

$$\frac{3}{6} \qquad \frac{2}{6} \qquad 6 \quad 3 \quad 2$$

Avremo così $3a^{\frac{1}{3}}(a+b) = 3\sqrt{a}(a+b)$ Sostituendo nella stessa guisa *i segni radicali* agli *esponenti fratti*, il prodotto precedente diverrà;

$$2a^{2} + a\sqrt{a} - a + 3\sqrt[6]{a^{3}}(a+b) - 2\sqrt[3]{(a+b)^{2}}$$

Sia ancora da moltiplicarsi

$$(a^{2} + 2\sqrt{a} - 3\sqrt[4]{b})(4a - 3\sqrt{a} + 2\sqrt[3]{b})$$

Sostituisco come sopra gli *esponenti fratti* ai *segni radicali*, e moltiplico al solito i *fattori* come segue.

$$a^{2}+2a^{\frac{1}{3}}-3b^{\frac{1}{4}}$$

$$4a^{\frac{1}{2}}-3a^{\frac{1}{3}}+2b$$

$$4a^{3}+8a^{-\frac{4}{3}}-12ab^{\frac{1}{4}}$$

$$-3a^{\frac{5}{2}}-6a^{\frac{5}{6}}+9a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}$$

$$+2a^{2\frac{1}{3}}b+4(ab)^{\frac{1}{3}}-6b^{\frac{7}{12}}$$

$$4a^{3}-3a^{2\frac{1}{2}}.a^{-\frac{1}{3}}+4a^{\frac{1}{4}}(2a-3b)^{-\frac{5}{6}}-6a^{-\frac{1}{2}}+9a^{\frac{1}{4}}b$$

$$+4(ab)^{\frac{1}{3}}+2ab^{2\frac{1}{3}}-6b^{\frac{7}{12}}$$

ovvero riponendo i *segni radicali* invece degli *esponenti fratti* questo prodotto sarà;

$$4a^{3}-3a^{2}\sqrt{a}+4a^{3}(2\sqrt{a}-3\sqrt[4]{b})-6\sqrt[6]{a^{5}}+9\sqrt[4]{a}\sqrt{b}$$

$$+4\sqrt[3]{ab}+2a^{2}.\sqrt[3]{b}-6\sqrt[12]{b}\sqrt{b}$$

Se le quantità sotto i *segni radicali* fossero *complesse* si faccia ciascuna eguale ad un *monomio* ipotetico, e si operi come sopra; dipoi al termine dell' Operazione si sostituiscano ai *monomj* ipotetici le quantità complesse e si avrà il prodotto ricercato

Sia per esempio da moltiplicarsi

$$\sqrt[3]{(a-b)^2}+\sqrt{(a+2b)^2}.(\sqrt[3]{(a-c)}+\sqrt[4]{(a-d)^3}).$$

Faccio ipoteticatamente

$$a-b^2=x;\ a+2b^2=y,\ a-c=z,\ a-d^3=t\ .$$

Così i dati *fattori* divengono

$$\begin{array}{l} a^{\frac{1}{3}} \\ x+y \\ z^{\frac{1}{3}}+t^{\frac{1}{4}} \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{3}\quad \frac{1}{3}\frac{1}{2}\quad \frac{1}{3}\frac{1}{4}\quad \frac{1}{2}\frac{1}{4}$$

Prodotto $(xz)+zy+xt+yt$

Ovvero riducendo allo stesso *denominatore* i *rotti* negli ultimi tre termini, e dipoi sostituendo da per tutto i *segni radicali* agli *esponenti fratti*, si avrà

$$\sqrt[3]{xz}+\sqrt[6]{zy}+\sqrt[12]{xt}+\sqrt[4]{yt}$$

Sostituisco in questi *radicali* i valori di x, y, z, t, ed il ricercato prodotto sarà;

$$\sqrt[3]{(a-b)^2(a-c)}+\sqrt[6]{(a-c)^2(a+2b)^2}+$$
$$\sqrt[12]{(a-b)^4(a-d)^3}+\sqrt[4]{(a+2b)^3.(a-d)^2}$$

Si potranno in seguito fare le *moltiplicke parziali* delle quantità poste sotto ai *segni radicali*, qualora si credesse necessario in qualchè applicazione particolare di questa moltiplica.

La *divisione dei radicali* non offre difficoltà dopo avere imparato il metodo tenuto per la *moltiplica*. Tanto nel *divisore*, che nel *dividendo* si sostituiscano gli *esponenti fratti* ai *segni radicali*, e dipoi

si operi colle note regole (58). Acciò si abbia una riprova della esattezza delle *moltipliche* fatte qui sopra, prendo in esempio la *divisione* di quei prodotti per uno dei loro *fattori*; e sia primieramente;

Divisore *Divivendo*

$$\frac{a+\sqrt{a}-\sqrt[3]{a+b})}{} \Big| \quad 2a^2+a\sqrt{a}-a+3\sqrt[6]{a}\,(a+b)^2 - 2\sqrt[3]{(a+b)^2}$$

Pongo gli *esponenti fratti* invece dei *segni radicali* ed il *divisore* ed il *dividendo* divengono come appresso, con i quali eseguisco al solito l'operazione che vedesi,

$$\frac{a+a^{\frac{1}{2}}-(a+b)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-(a+b)^{\frac{1}{3}}} \Big|$$

Quoto $2a-a+2(a+b)$

$$2a^2+a^{\frac{3}{2}}-a+3a^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{1}{3}}-2(a+b)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{2a^2+2a^{\frac{3}{2}}-2a(a+b)^{\frac{1}{3}}}{0-a^{\frac{3}{2}}-a+2a(a+b)^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{-a^{\frac{3}{2}}-a+a^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{1}{3}}}{0 \quad 0}$$

$$+2a^{\frac{1}{3}}(a+b)^{\frac{1}{2}} \quad +2a^{\frac{1}{3}}(a+b)^{\frac{1}{3}} \quad -2(a+b)^{\frac{2}{3}}$$

$$+2a^{\frac{1}{3}}(a+b)^{\frac{1}{2}} \quad +2a^{\frac{1}{3}}(a+b)^{\frac{1}{3}} \quad -2(a+b)^{\frac{2}{3}}$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

Sia ancora da dividersi $4a^3 - 3a^2\sqrt{a} + 4a^3(2\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[4]{b}) - 6\sqrt[6]{a^5} + 9\sqrt[4]{a}.\sqrt[3]{b} + 4\sqrt[4]{ab^3} + 2a^2\sqrt{b} - 6\sqrt[12]{a}.\sqrt[2]{b}$ per $a + 2\sqrt{a} - 3\sqrt{b}$. Pongo il *divisore*, ed il *dividendo* cogli *esponenti fratti*, ed opero come segue,

$$a^2 + 2a^{\frac{1}{2}} - 3b^{\frac{1}{4}} \quad \text{Divisore}$$

$$4a^{\frac{1}{2}} - 3a^{\frac{1}{3}} + 2b^{\frac{1}{4}} \quad \text{Quoto}$$

$$4a^3 - 3a^{2\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{3}} + 4a^{\frac{1}{4}}(2a - 3b^{\frac{1}{4}}) - 6a^{\frac{5}{6}} + 9a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}} + 4(ab)^{\frac{1}{3}} + \text{ec.}$$

$$4a^3 \qquad + 4a^{\frac{1}{4}}(2a - 3b^{\frac{1}{4}})$$

$$0 - 3a^{2\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{3}} - 6a^{\frac{5}{6}} + 9a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}$$

$$-3a^{2\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{3}} - 6a^{\frac{5}{6}} + 9a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}$$

$$0$$

$$+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 4(ab)^{\frac{7}{12}} - 6b$$

$$+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 4(ab)^{\frac{7}{12}} - 6b$$

$$0$$

Se sotto i *segni radicali* si avessero *quantità complesse*, si ridurrebbero a *monomj* ipotetici, come si è fatto nella moltiplica, e dipoi nel *quoto* si farebbe l' usata sostituzione.

66. Le quantità poste sotto i *segni radicali* possono talvolta essere *monomj*, *o polinomj negativi*. Se questi *radicali* di quantità *negative* sono di grado *dispari* potranno sempre avere un *valore reale* esatto o approssimato: perchè la quantità *negativa* può risultare da un numero dispari di moltipliche di altra quantità *negativa* in se medesima, e questa ultima quantità sarà la *radice reale* della prima.

Così $\sqrt[3]{-8} = -2$; $\sqrt[5]{-ab^3} = -a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}}$; poichè è evidente che $-2 \times -2 \times -2 = -8$, e che $-a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}} \times -a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}} \times -a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}} \times -a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}} \times -a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}} = -ab^3$

Se per altro i *radicali* di quantità *negative* siene di grado pari non potranno avere alcun *valore reale* ne esatto, ne approssimato; perchè non può mai risultare quantità *negativa* da un prodotto pari di una quantità in se stessa, o questa sia *positiva*, o *negativa*. I *radicali* $\sqrt[4]{+9}$, $\sqrt[4]{-16a^4b}$ non possono nascere dal prodotto di alcuna quantità in se stessa. Infatti $-3 \times -3 = +9$, e

$$-2ab^{\frac{1}{4}} \times -2ab^{\frac{1}{4}} \times -2ab^{\frac{1}{4}} \times -2ab^{\frac{1}{4}} = +16a^4b.$$

Pertanto i *radicali* di grado pari delle quantità *negative* si sono chiamati *immaginarj*, e questi pure non ostante la loro esistenza impossibile si assoggettano al calcolo al pari di ogn' altra quantità.

67. Supposto $2n$ un qualunque numero pari, la *formola* $\sqrt[2n]{-a}$ rappresenta qualsivoglia *radicale immaginario*. Ma $\sqrt[2n]{-a}$ è lo stesso che $\sqrt[2n]{a} \times -1$ e riflettendo che in generale $\sqrt[n]{pq} = \sqrt[n]{p} \times \sqrt[n]{q}$ (64), avremo $\sqrt[2n]{a} \times -1 = \sqrt[2n]{a} . \sqrt[2n]{-1}$. Questa riduzione degli *immaginarj* a prodotti in parte *reali*, ed in parte *immaginari* rappresentati con $\sqrt[2n]{-1}$ apporta molta chiarezza nel loro calcolo, e lo riduce a quello usato per i radicali in genere. Acciò poi vi si possano applicare gli esponenti fratti invece del segno $\sqrt{}$ si scriverà $(-1)^{\frac{1}{2n}}$ intendendo così che dal -1 deve estrarsi la radice $2n$ sima, il che costituisce appunto la quantità *immaginaria* Si avverta adunque di non confondere questa espressione $(-1)^{\frac{1}{2n}}$ coll' altra $-1^{\frac{1}{2n}}$; perchè questa significa $-\sqrt[2n]{1} = -1$, e la prima esprime $\sqrt[2n]{-1}$.

68. Dopo tali riflessioni sulla natura degli *immaginarj* si apprenderanno agevolmente le regole del loro Algoritmo. Trascurate pertanto la *somma* e la *sottrazione*, che non differiscono dai soliti metodi cominciamo dalla *riduzione* degli *immaginarj alla più semplice espressione*. Basterà a tale uopo l'esaminare gli appresso esempj.

$$\sqrt{(-8a^2)} = \sqrt{(4a^2 \times -2)} = 2a\sqrt{-2} = 2a\sqrt{2}.\sqrt{-1}.$$

Ultima riduzione

$$\sqrt[6]{-a^4 b^3} = a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{1}{2}} \sqrt[6]{-1} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt[6]{-1}.$$

Ultima riduzione

La *Moltiplica degli immaginarj* non differisce da quella dei *radicali*. Si sostituisce convenientemente gli *esponenti frazionari* ai segni *radicali*, e si prosegue l'operazione colle solite regole (50). Ecco alcuni esempj di *moltipliche* di *monomj immaginarj*, dopo i quali segue la *moltiplica* di due fattori composti di quantità reali, ed immaginarie.

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{a} \times (-1)^{\frac{1}{2}} (-1)^{\frac{1}{2}} = a \times -1 = -a$$

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = (ab)^{\frac{1}{2}} (-1)^{\frac{1}{2}} (-1)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{ab}$$

$$\sqrt[6]{-a} \times \sqrt[6]{-b} = \sqrt[6]{ab}.(-1)^{\frac{4}{6}}.\times(-1)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{ab} \times (-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= -\sqrt[6]{ab}$$

$$\sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{ab}\,(-1)^{\frac{1}{4}} \times (-1)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{ab}(-1)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt[4]{ab} \times \sqrt{-1}$$

Sieno i fattori $x^3 - 3x^2\sqrt{-b} + 3x\sqrt[4]{-b} - \sqrt[4]{-b}^3$.

$$x^2 - 2x\sqrt[4]{-b} + \sqrt{-b}$$

Vi sostituisco gli *esponenti frazionarj*, e trasformo gli *immaginarj* secondo la prescritta regola. Dopo ciò eseguisco al solito la *moltiplica* dei *fattori* così cambiati.

$$x^3 - 3x^2 b^{\frac{1}{4}}.(-1)^{\frac{1}{4}} + 3x b^{\frac{1}{2}}.(-1)^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{4}}.(-1)^{\frac{3}{4}}$$

$$x^2 - 2x b^{\frac{1}{4}}(-1)^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$x^5 - 3x^4 b^{\frac{1}{4}}.(-1)^{\frac{1}{4}} + 3x^3 b^{\frac{1}{2}}.(-1)^{\frac{1}{2}} - x^2 b^{\frac{3}{4}}.(-1)^{\frac{3}{4}}$$

$$-2x b^{\frac{1}{4}}(-1)^{\frac{1}{4}} + 6x b^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}} - 6x b^{\frac{3}{4}}(-1)^{\frac{3}{4}} - 2xb$$

$$+ x b^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}} - 3x b^{\frac{3}{4}}(-1)^{\frac{3}{4}} - 3xb$$

$$-b^{\frac{5}{4}}(-1)^{\frac{5}{4}}$$

$$x^5 - 5x^4\sqrt[4]{-b} + 10x^3\sqrt{-b} - 10x^2\sqrt[4]{-b}^3$$

$$- 5xb - \sqrt[4]{-b}^5$$

Da questi esempj di *moltipliche* si conosce apertamente che il metodo da tenersi per la *divisione* degli *immaginarj* è lo stesso di quello usato per i

radicali in genere, onde per brevità tralasceremo gli esempj di questa ultima operazione.

Estrazione della radice quadra, e della Cuba

69. L'ordine delle operazioni del Calcolo già esposto in principio dell' Aritmetica (5) richiederebbe che dopo la *divisione algebrica* applicata ad'ogni specie di quantità letterali si passasse immediatamente alla *Elevazione a potenza*, e quindi alla *Estrazione della radice* Ma poiche della *seconda*, e *terza potenza*, si è sufficentemente trattato (54. e 55), e da quella teorica dipende l' *estrazione della radice quadra*, e *della cuba*, crediamo opportuno premettere queste operazioni, e quindi la risoluzione delle equazioni in cui esse han luogo. Dopo ciò passeremo alla generale teorica della *Elevazione a potenza*, e della respettiva *Estrazione di radice*.

70. Dai *monomj algebrici* si estrae la *radice quadra* dividendo per *due* tutti gli *esponenti* delle lettere, che formano il *monomio*, e se ne estrae la *radice cuba* dividendo questi *esponenti* per *tre* (59). Se i monomj abbiano *coefficienti* numerici, e si voglia la *radice quadra*, conviene osservare se questi sieno multipli di alcun *numero quadrato*; e se vogliasi la *radice cuba* si osserverà se sieno multipli di alcun *numero cubo*. Dopo tale osservazione si prenderà la respettiva *radice* del *numero quadrato*, o *cubo* contenuti in tali *coefficienti*, e questa *radice* si porrà fuori del segno radicale lasciando sotto questo segno l'altro *fattore* del *coefficiente numerico*. Per esempio $\sqrt[3]{(8a^3b^6)} = 2ab^2$, $\sqrt{(27a^4)} = 3a^2\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{(16ac^3)} = 2c\sqrt[3]{2a}$. Resta quindi manifesto che l'*estrazione della radice* dai *monomj* è la stessa cosa che la riduzione dei *radicali* alla più semplice espressione. (65)

71. L'*estrazione della radice quadra*, e *della cuba* dei *polinomj* consiste nel ritornare dalle formole di un quadrato, e di un cubo perfetto al *Polinomio* di primo grado, che le ha formate (55). Si suppone che la data quantità *polinomia* contenga precisamente quello stesso ordine di termini componenti le precitate formole, e quindi da ciascuno di questi termini si deducono calcolando quelle quantità che gli hanno prodotti, e che formano in conseguenza la domandata *radice*.

Applichiamo questo discorso alla *estrazione della radice quadra* da un numero composto, e rappresenti N questa radice espressa dalla seguente serie, in cui h, h', h''... $h^{(m)}$ sono le cifre del N, e gli esponenti frà parentesi, come (4), (5)..... (m—2), (m—1), (m) indicano il numero degli apici, che distinguono le cifre. Avremo in generale;

$$N = 10^{m} h + 10^{m-1} h' + 10^{m-2} . h'' + 10^{m-3} h''' + 10^{m-4} h^{(4)} + 10^{m-5} h^{(5)} \ldots\ldots + 10^{2} h^{(m-2)} + 10 h^{(m-1)} + h^{(m)}$$

Il numero quadrato N, che é il proposto da cui dee estrarsi la *radice quadra* dovrà; secondo la formola (55) del quadrato di un polinomio, concepirsi formato secondo l'ordine della serie seguente, qualora m sia numero pari.

$$N = 10^{2} h + 2 . 10^{2m-1} . hh' + 10^{2m-2} \left\{ \begin{matrix} h'^{2} \\ 2hh'' \end{matrix} \right\} + 2 . 10^{2m-3} \left\{ \begin{matrix} hh''' \\ h'h'' \end{matrix} \right\}$$

$$+ 10^{2m-4} \left\{ \begin{matrix} h''^{2} \\ 2h.h^{(4)} \\ 2h'.h''' \end{matrix} \right\} \ldots$$

. . . . . .

$$\pm 2.10^{m+1}\left\{\begin{array}{l} h^{(m-1)}.h \\ h'^{(m-2)}.h \\ h''^{(m-3)}.h \\ \dots\dots\dots \\ h^{\left(\frac{m-1}{2}\right)}.h^{\left(\frac{m}{2}\right)} \end{array}\right\} \pm 10^{m}\left\{\begin{array}{l} h^{\left(\frac{m}{2}\right)^2} \\ 2h^{(m)}.h \\ 2h'^{(m-1)}.h \\ \dots\dots\dots \\ 2h^{\left(\frac{m-1}{2}\right)}.h^{\left(\frac{m+1}{2}\right)} \end{array}\right\} \dots$$

$$\pm 2.10^{m-1}\left\{\begin{array}{l} h'^{(m)}.h \\ h''^{(m-1)}.h \\ h'''^{(m-2)}.h \\ \dots\dots\dots \\ h^{\left(\frac{m}{2}\right)}.h^{\left(\frac{m+1}{2}\right)} \end{array}\right\} \dots \pm 10^{4}\left\{\begin{array}{l} h^{(m-2)} \\ 2h^{(m)}.h^{(m-4)} \\ 2h^{(m-1)}.h^{(m-3)} \end{array}\right\}$$

$$\pm 2.10^{3}\left\{\begin{array}{l} h^{(m)}.h^{(m-3)} \\ h^{(m-1)}.h^{(m-2)} \end{array}\right\} \pm 10^{2}\left\{\begin{array}{l} h^{(m-1)} \\ 2h^{(m)}.h^{(m-2)} \end{array}\right\}$$

$$\pm 2.10h^{(m)}.h^{(m-1)} \pm h^{(m)}$$

E qualora l'*esponente* m sia numero dispari, i tre termini di mezzo saranno variati in questa forma.

$$10^{m+1}\left\{\begin{array}{l} h^{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2} \\ 2h,\ h^{(m-1)} \\ 2h'.\ h^{(m-2)} \\ \cdots\cdots \\ 2h^{\left(\frac{m-3}{2}\right)}.\ h^{\left(\frac{m+1}{2}\right)} \end{array}\right\} + 2.10^{m}\left\{\begin{array}{l} h.\ h^{(m)} \\ h'.\ h^{(m-1)} \\ h''.\ h^{(m-2)} \\ \cdots\cdots \\ h^{\left(\frac{m-1}{2}\right)}.\ h^{\left(\frac{m+1}{2}\right)} \end{array}\right\}$$

$$+ 10^{m-1}\left\{\begin{array}{l} h^{\left(\frac{m+1}{2}\right)^2} \\ 2h'.\ h^{(m)} \\ 2h''.\ h^{(m-1)} \\ \cdots\cdots \\ 2h^{\left(\frac{m-1}{2}\right)}.\ h^{\left(\frac{m+3}{2}\right)} \end{array}\right\}$$

Considerando attentamente questa serie apparisce. Primo. Che i quadrati parziali delle cifre h, h', h''. . . . $h^{(m)}$ del N si trovano ogni due termini, e si cominci dal primo a sinistra $10^{2m}\,h^{2}$, o dall' ultimo a destra $h^{(m)^2}$; e che questi quadrati sono con le potenze pari del 10, cioè con 10^{2m}, $10^{(2m-2)}$ .....

10^4, 10^2, 10^0. Riflettendo pertanto che il quadrato delle cifre semplici da 1 fino a 9 non oltrepassa un numero di due cifre, è visibile che se N^2 avrà un numero pari di cifre come 84,51,87,48 il quadrato delle *unità* della *radice* sarà compreso in 48×10^6; il quadrato delle sue *diecise* in $87 \cdot 10^2$; quello delle sue *centinaja* in $51 \cdot 10^4$; quello delle sue *migliaja* in $84 \cdot 10^6$. Se poi N^2 avrà un numero dispari di cifre, come 5,61,83,14,42, il quadrato delle *unità* della radice sarà parimente compreso nelle ultime due cifre a destra $42 \cdot 10^0$; quello delle *diecine* in $14 \cdot 10^2$; quello delle *centinaja* in $83 \cdot 10^4$; quello delle *migliaja* in $61 \cdot 10^6$; quello delle *diecine delle migliaja* nella sola ultima cifra a sinistra $5 \cdot 10^8$. Adunque *se incominciando dalle unità, si separino con una virgola a due, a due le cifre del proposto numero* N^2, *la sua radice* N *avrà tante cifre quante sono queste separazioni*; *ed ognuna di esse comprenderà per ordine* il *quadrato di ciascuna cifra di* N.

Secondo. Che i prodotti parziali delle cifre $h+h'+h''\ldots h^{(p-1)}$ nella cifra $h^{(p)}$ che segue, precedono sempre nel numero N^2 quel termine in cui si trova

$h^{(p)^2}$. Così il predotto hh' è innanzi ad h'^2: il predotto $(h+h')h''$ si trova prima di h''^2 ec. E più generalmente nei termini di mezzo, che sono i più complicati, si vede nel caso di m numero pari che il termine in cui è $h^{\frac{(m)}{2}^2}$ è dopo i termini in cui si trovano i prodotti $(h+h'+h''....+h^{\frac{(m-1)}{2}})h^{\frac{(m)}{2}}$. Nel caso di m numero dispari si trova similmente $h^{\frac{(m+1)}{2}^2}$ dopo i termini, che comprendono i prodotti $(h+h'+h''...h^{\frac{(m-1)}{2}})h^{\frac{(m+1)}{2}})$

72. Da tali considerazioni chiaro deriva il metodo di estrarre la radice quadra dai numeri: e sia per esempio proposto il numero 84511249. Lo pongo sotto il segno radicale, ed incomincio dalle unità a separare con virgola le sue cifre a due, a due. Siccome queste separazioni sono quattro, saranno del pari quattro le cifre della radice di questo numero. Nelle ultime due cifre 84 dee contenersi il quadrato della cifra ultima a sinistra della radice; perciò questa cifra sarà 9, che pongo sopra il segno radicale, e sottraggo il quadrato 81 dal numero 84. L'avanzo 3 con le due cifre seguenti 51, cioè il numero 351 deve com-

	9193
	$\sqrt{(84,51,12,49)}$
181	351
1	17012
1829	55149
9	00000
18283	
3	

prendere prima il doppio prodotto della cifra 9 per la seconda cifra incognita, e quindi il quadrato di questa cifra. Che però divido per 18 (doppio del 9) le prime cifre 35 del 351, ed il quoto 1 sarà la seconda cifra della radice cercata. Pongo adunque questa cifra 1 in tre luoghi cioè; Pmo. Accanto alla prima cifra 9 sopra il segno radicale. Sdo. Accanto al divisore 18 sulla destra, Terzo. Sotto a questo divisore per l' oggetto di fare la moltiplica di 181 per 1, e comporre così il quadrato di 1, e il doppio prodotto di 9 per 1, i quali termini debbono appunto trovarsi nel 351. Sottraggo 1×181 dal 351, ed accanto all' avanzo 170 abbasso le due susseguenti cifre 12 del numero proposto. In queste cifre riunite 17012 si deve contenere prima il doppio del prodotto di 91 per la terza cifra incognita della radice, e quindi il quadrato di questa cifra. Laonde per 182 (doppio di 91) divido le cifre 1701, ed il quoto 9 sarà la terza cifra cercata che pongo negli stessi tre luoghi sopra indicati. Sottraggo il prodotto 1829×9 dal 17012, ed accanto all' avanzo 551 abbasso l' ultima coppia 49 delle cifre del numero proposto. Faccio sul numero 55149 le stesse oprazioni come in addietro, e trovo la quarta ed ultima cifra 3 della radice richiesta senza alcuno avanzo. Dal che concludo che il numero 9193 è la radice quadra esatta del proposto numero 84511249.

Risulta da questo esempio che l' estrazione della radice quadra dai numeri consiste in queste tre diverse operazioni. Primo. separare con virgola a due a due le cifre del proposto numero da destra verso sinistra. Seconda. Estrarre la radice dalla cifra, o dalle due cifre che rimangono dopo l' ultima virgola a sinistra. Terza. Dividere gli avanzi successivi (a cui si annettono sempre le due cifre

frà le virgole) pel doppio delle cifre già trovate che formano la radice: avvertendo in tali divisioni di non considerare nel *dividendo* l'ultima cifra a destra, atteso che al *divisore* si aggiunge sempre la cifra del quoto per formare il quadrato di questa cifra medesima

73. Non sempre il numero proposto è un quadrato perfetto, onde avviene che in ultimo della operazione si trova un avanzo talvolta maggiore della radice estratta, ma non mai maggiore del doppio di lei; così $\sqrt{80}=8$ coll' avanzo 16, che è appunto il doppio della radice 8. E' facile il vedere che questo avanzo non può superare il doppio della radice. Infatti chiamato n^2 il *quadrato massimo* contenuto nel proposto numero N, la radice di questo sarà n con un avanzo. Se questo superi $2n$, e sia almeno $2n+1$ avremo $N=n^2+2n+1$, e quindi $\sqrt{N}=n+1$, Dunque n^2 non sarebbe il *massimo quadrato* contenuto in N; Il che è contro l'ipotesi. E quindi apparisce, che se nell' eseguire l'estrazione della radice quadra si trovi un avanzo maggiore del doppio delle cifre che debbono formare questa radice, avremo indizio certo che l' operazione è sbagliata per essere la radice trovata minore della vera.

74. Risulta ancora dal precedente ragionamento che qualunque numero intiero N non quadrato non può avere la sua radice espressa esattamente ne da numeri intieri, ne da frazioni. Intendasi come sopra n^2 il massimo quadrato contenuto in N, e sia r l'avanzo, di modo che abbiasi $N=n^2+r$. La

quantità n^2+r sarà sempre minore di $(n+1)^2 = n^2+2n+1$, perciò $\sqrt{N}$ cade fra n, ed $n+1$, e sembrerebbe dovere essere $\sqrt{N}=n+\frac{1}{x}$, supposta $\frac{1}{x}$ una frazione atta al proposito. Ma d'altronde $\left(n+\frac{1}{x}\right)^2 = n^2+\frac{2n}{x}+\frac{1}{x^2}$; e se fosse $n^2+\frac{2n}{x}+\frac{1}{x^2}=N$ dovrebbe aversi $\frac{2n}{x}+\frac{1}{x^2}$, ovvero $\frac{2nx+1}{x^2}=r$ numero intiero. Questa condizione è impossibile, perciocchè $2nx+1$ non è multiplo di x, ed in conseguenza neppure di x^2. Dunque $\sqrt{N}$ non può esprimersi esattamente con alcun numero intiero, o frazionario.

75. Frà i diversi artifizi immaginati per estrarre la radice quadra approssimata da un numero N quadrato merita il primo luogo quello di moltiplicare questo numero per 10^{2p} posto p un numero qualunque intiero, e positivo. Chiamando n'^2 il massimo quadrato contenuto in $N.\ 10^{2p}$, ed r' l'avanzo, sarà $N.\ 10^{2p}=n'^2+r'$; e di qui $\sqrt{N}=\frac{\sqrt{(n'^2+r')}}{\sqrt{(10^{2p})}}$

Ragionando come in addietro (74) si vede in

questo caso che il vero valore di $\sqrt{N}$ cade fra $\frac{n'}{10^p}$ ed $\frac{n+1}{10^p}$. Se adunque si trascura l'avanzo $\frac{r'}{10^{2p}}$, e si prenda $\frac{n'}{10^p}$ per la radice del numero N, questa differirà dal vero meno che la frazione $\frac{1}{10^p}$; la quale si può rendere piccola a piacimento.

Vogliasi per esempio la radice quadra di 57 a meno di $\frac{1}{1000}$ di differenza. Trasformo il 57 in 57000000, perchè $(1000)^2 = 1000000$, ed estraggo col metodo sopra spiegato la radice prossima dal 57000000, che trovo essere 7549 mille volte maggiore di quella che conviene al 57. Riduco 7549 mille volte minore, cioè 7,549. Questa radice è più piccola della vera del 57 colla differenza minore di $\frac{1}{1000}$. Infatti se accresco 7,549 di $\frac{1}{1000}$, esso diviene 7,550; ed altresì $(7,550)^2 =$ 57,0025 numero maggiore del proposto 57.

```
                 7549
          √(57,00,00,00
145   49
  5   800
1504   7500
  4   148400
15089   11599 Avanzo
    9
```

Usando lo stesso calcolo per estrarre la radice quadra dai numeri 2, e 3 a meno di un *dieci-milionesimo* di differenza, si troverà;

$\sqrt{2} = 1,4142136$ $\sqrt{3} = 1,7320508$

76 Siccome il quadrato di una *frazione* altro non è che la moltiplica della *frazione* in se medesima, e ciò si eseguisce moltiplicando in se stessi il

numeratore, ed il *denominatore* (29), resta manifesto all' incontro, che la radice quadra di una *frazione* si avrà coll' estrarla da ciascuno dei suoi *termini*. Si otterrà in tal guisa $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, poichè $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$, poichè $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$. Ma allora quando i *termini* del *rotto* non saranno numeri quadrati, il metodo più spedito per estrarne la radice approssimata fino a quel limite che si desidera, sarà quello di ridurre il *rotto* in *frazione decimale* con un numero pari di cifre acciò il *denominatore* della *frazione* sia un quadrato esatto; e fare dipoi su questa la stessa operazione usata qui sopra per le *radici* approssimate dei numeri intieri. Sia proposto di estrarre la *rndice quadra* da $\frac{3}{7}$ a meno di $\frac{1}{1000000}$

```
                    0,654653
                 √(0,42,85,71,42,85,71)
125                  685
  5                   6071
1304                   85542
   4                    702685
13086                     4806071
    6                      878162      Avanzo
130925
     5
1309303
     3
```

Riduco $\frac{3}{7}$ nella decimale 0,428571428571 fino a dodici cifre perchè 1000000=10 . Estraggo la ra-

dice da questo decimale, e la trovo 0,654653, alla quale se aggiungessi $\frac{1}{100000}$ diverrebbe 0,654654, il di cui quadrato è 0,428571859716 maggiore della frazione proposta.

Se sia dato un numero con *rotto ordinario*, ovvero *decimale*, da cui si debba estrarre la *radice quadra*, si ridurrà nel primo caso il *rotto ordinario a decimale* con quel numero pari di cifre conveniente all' approssimazione ricercata; e nel secondo si farà che il dato *decimale* abbia un numero pari di cifre aggiungendoli alla destra tanti *zeri* quanti bastino alla domandata approssimazione. Dipoi si procederà colla stessa operazione di sopra.

77. Giova infine osservare che le *frazioni decimali* ottenute nella estrazione approssimata delle *radici quadre* non possono essere giammai ne *finite*, ne *periodiche*, e saranno perciò composte di una serie indefinita di cifre. Infatti in queste approssimazioni l'aggiunta alla parte *dividenda* è sempre costante di *due zeri*, ed il *divisore* è sempre diverso, cioè il doppio delle cifre già poste per la *radice*; dunque, conforme già si é notato (36), il quoto non può mai ritornare collo stesso periodo, e molto meno potrà il quoto essere *finito*, non essendo per ipotesi *numero quadrato* quello proposto per estrarne la *radice*.

78. Passando alla estrazione della *radice cuba* dai numeri, terrò lo stesso metodo generale già enunciato (71). Laonde supposto un numero intiero qualunque $N = 10^{m} h + 10^{m-1} h' + 10^{m-2} h'' + 10^{m-3} h''' \ldots h^{(m)}$, il *cubo* di lui sarà così composto (55).

$$N^3 = 10^{3m} h^3 + 3.10^{3m-2} hh'(10h+h') + 10^{3m-3} h'^3 + 3.10^{3m-5} h''(10h+h')(10^2 h + 10h' + h'') + 10^{3m-6} . h''^3 \ldots$$

$$\ldots\ldots + 10^{6}\, h^{(m-2)^{3}} + 3.\, 10^{4}\, h^{(m-1)} \left(10^{m-2}\, h + 10^{m-3}\, h' \ldots + h^{(m-2)}\right)$$

$$\left(10^{m-1}\, h + 10^{m-2}\, h' \ldots\ldots + h^{(m-1)}\right) + 10^{3}\, h^{(m-1)} + 3.\, 10^{5}\, h^{(m)}$$

$$\left(10^{m-1}\, h + 10^{m-2}\, h'' \ldots\ldots + h^{(m-1)}\right)\left(10^{m}\, h + 10^{m-1}\, h' \ldots\ldots + h^{(m)}\right)$$

$$+ h^{(m)^{3}}$$

Ovvero eseguendo in parte le moltipliche accennate, tantochè si ottenga negli esponenti del 10 la progressione dei numeri naturali $3m$, $3m-1$, $3m-2$ ..... 2, 1, 0, avremo;

$$N = 10^{3}\, h^{3m} + 3.\, 10^{3m-1}\, h'^{2} + 3.\, 10^{3m-2}\, hh'^{2} + 10^{3m-3}.$$

$$h'^{3} + 3.\, 10^{3m-4}\, (10h + h')^{2}\, h'' + 3.\, 10^{3m-5}\, (10h + h')^{2}\, h''$$

$$+ 10^{3m-6}\, .\, h''^{3} \ldots\ldots\ldots\ldots + 10^{6}\, h^{(m-2)^{3}} + 3.\, 10^{5}$$

$$\left(10^{m-2}\, .\, h + 10^{m-3}\, .\, h' \ldots\ldots + h^{(m-2,}\right)^{2}\, h^{(m-1)} + 3.\, 10^{4}$$

$$\left(10^{m-2}\, h + 10^{m-3}\, h' \ldots\ldots + h^{(m-3)}\right)^{2}\, h^{(m-1)} + 10^{3}\, h^{(m-1)} + 3.\, 10^{2}$$

$$\left(10^{m-1}\, h + 10^{m-2}\, h' \ldots\ldots + h^{m-1}\right)^{2}\, h^{(m)} + 3.\, 10^{m-1}\left(10^{m-2}\, h\right.$$

$$\left. + 10^{m-2}\, h' \ldots + h^{(m-1)}\right)^{2}\, h^{(m)} + h^{(m)^{3}}.$$

Da questo ultimo valore d N più apertamente che dal primo risulta;

Primo. Che i *cubi* delle cifre $h, h', h'' \ldots h^{(m)}$ si trovano colle respettive potenze *cubiche* del 10, incominciando dal 10^{3m}, e proseguendo fino in ultimo a $10^{3}, 10^{0}$.

Secondo. Che *i prodotti parziali* delle predette cifre, e dei *quadrati* loro posti secondo l'ordine dei termini della *terza potenza* (55), si trovano colle *potenze* del 10 intermedie fra le due *cubiche* successive.

Quindi chiaro deriva il metodo da tenersi per la *estrazione* della *radice cuba* dai numeri. Si incomincerà dal dividere a tre per tre con virgola le cifre del numero proposto andando da destra verso sinistra, e ciò per distinguere la vera posizione dei *cubi* delle cifre $h, h', h'' \ldots\ldots h^{(m)}$, che debbono formare la *radice* del proposto numero. Imperciocchè il *cubo* delle *diecine* $h^{3(m-1)}$, non potendo di natura sua oltrepassasse dalle *migliaia* verso l'*unità*, dee essere col 10^{3}; e perciò il *cubo* $h^{3(m)}$ delle *unità* dee trovarsi nelle tre cifre susseguenti alle *migliaia*. Parimente il *cubo* delle *centinaia* $h^{3(m-2)}$ starà dopo *sei* cifre, perchè unito col 10^{6}, il *cubo* delle *migliaia* starà dopo *nove* cifre, perchè unito col 10^{9}, e così di seguito. Frà questi limiti delle

posizioni dei *cubi* delle cifre debbono stare gli altri termini componenti la potenza cubica, che si ricerca nel numero proposto. E siccome due sono le serie che esprimono N^3 rispetto alle sue cifre, due sono i metodi per estrarre la *radice cuba*, dei quali cogli esempj seguenti renderò ragione.

Sia 96071959 il numero proposto per estrarne la *radice cuba*. Lo pongo sotto il segno radicale, e separo con virgola le sue cifre a tre per tre incominciando, come vedesi, dalle unità. Adunque la *radice* di questo numero avrà tre cifre, e sarà perciò comparabile ad un *trinomio*

$$10^2 h + 10h' + h''$$

Il *cubo* di questo *trinomio*, seguendo l' ordine della prima serie in cui qui sopra sono disposti i *termini* di N^3, sarà;

$$10^6 h^3 + 3.\ 10^4 hh'(10h + h') + 10^3 h'^3 + 3\ 10^2 h''(10h + h')(10^2 h + 10h' + h'')^3 + h''^3$$

Adunque nelle cifre 96 ultime a sinistra viene rappresentato il primo termine $10^6 h^3$, e conseguentemente sarà $h = 4$, perchè $64 = 4^3$ è il cubo prossimo minore al numero 96.

$40 + h'$	$\sqrt[3]{(96,071,959)}$ 458
12	64
$h'(480 + 12h')$	3207
60	2700
540×5	5071

$450+h''$	5071
135	125
2250	494695
1350	494640
450	559
$h''(60750+135h'')$	512
1080	*Avanzo* 47
61830×8	

Sottraggo dal 96 il 64, ed accanto all' avanzo 32 abbasso le due cifre 07 del proposto numero, e rifletto che nel numero 3207 si dee contenere 3.

$10\,hh'(10h+h')$, cioè $12h'(40+h')=h'(480+12h')$. Misuro 480 col 3207, e trovo il *quoto* 6: ma facendo $h'=6$ sarebbe $h'(480+12h')=492\times 6$, prodotto superiore al numero 3207, che lo dee contenere. Prendo pertanto $h'=5$, e così ottengo il prodotto $5\times 540=2700$, che sottraggo dal 3207. Accanto all' avanzo 507 abbasso la cifra 1, e trovo che nel numero 5071 si contiene il cubo $h'^3=125$, coll' avanzo 4946. Appresso a questo avanzo calo le due cifre 95 del proposto numero, e fatto lo stesso precedente ragionamento espresso ancora dal calcolo impostato nell' esempio, trovo $h''=8$: onde conchiudo che il numero 96071959 ha per sua *radice cubica approssimata* il numero 458 coll' ultimo avanzo 47. Infatti colla *moltiplica* ottengo. $(458)^3=96071912$ a cui aggiunto 47 ritorna il proposto numero.

Volendo altresì usare la seconda serie in cui sono stati disposti i termini di N^3, avremo per un *quadrinomio* qualunque numerico;

$$(10^3 h + 10^2 h' + 10 h'' + h''')^3 = 10^9 h^3 + 3.10^8 h^2 h' + 3.10^7 hh'^2 + 10^6 h'^3 + 3.10^5 (10h + h') h''^2 + 3.10^4 (10h + h')^2 h''^2 + 10^3 h''^3 + 3.10^2 (10^2 h + 10h' + h'')^2 h''' + 3.10 (10^2 h + 10h' + h'') h'''^2 + h'''^3 :$$

E perciò se sia proposto di estrarre la *radice cuba* dal numero 6403769800, che colla separazione delle sue cifre a *tre* per *tre* conosco avere una *radice quadrinomia*, lo pongo al solito sotto il segno radicale, e dalla cifra 6 prima a sinistra, rappresentante $10^8 h^3$ primo termine della *formola*, estraggo *la radice cuba prossima minore*, che vedesi essere 1[illegible]. Sottraggo dipoi il cubo di 1 dal 6, ed ho l' avazo 5, accanto al quale abbasso le tre cifre 403 del proposto numero.

Dalla stessa *formola* rilevo che nel 5403 si dee contenere il *triplo prodotto del quadrato della prima cifra* 1 *per la seconda finqui incognita*; *dipoi il triplo prodotto del quadrato di questa seconda per la prima, ed il cubo della seconda*. Divido a tale uopo le prime delle due cifre 54 per $3.1^2 = 3$, ed osservo che il *quoto* 8 è il massimo che possa sodisfare *ai due prodotti, ed al cubo indicati dalla formola*, è per-

```
          1857
        √6,403,769,800
          1
         5403
3×8 .    24
         300
3×64 . . 192
3        1083
8 . . . . 512
          571769
972×5 . . 4860
          8576
54×25 . . . 1350
3          72269
5 . . . . .  125
```

ciò pongo 8 come seconda cifra della radice cercata, e fatto il calcolo, che vedesi dei *precitati prodotti, e del cubo* trovo infine l'avanzo 571 accanto al quale abbasso le tre susseguenti cifre 769 del numero proposto.

	72144800
34225×3[illegible]7 =	718725
	27230
555×49	27195
3	350
7	343
Avanzo	7

La *formola* medesima mi dice che nel 571769 si dee contenere *il triplo prodotto del quadrato di* 18 *per la terza cifra finora incognita della radice; dipoi il triplo prodotto di* 18 *pel quadrato di questa cifra, ed il cubo di lei.* Divido a tale oggetto

$$5717 \text{ per } 3.\ 18^2 = 972,$$

e trovo il *quoto* 5 massimo che possa sodisfare alle condizioni richieste della *formola*; onde è che pongo 5 per la terza cifra della *radice*, ed eseguito il richiesto calcolo relativo a questa terza cifra ho in ultimo l'avanzo 72144 accanto al quale pongo le ultime tre cifre 800 del numero proposto. Dopo ciò colle analoghe considerazioni dettate dalla *formola* trovo la quarta cifra 7 della *radice* coll'ultimo avanzo 7, d'onde conchiudo che 1857 è la *radice cuba ricercata*; ed infatti $(1857)^3 = 6403769793$, a cui aggiunto l'avanzo 7 ritorna il numero proposto.

79. Siccome nella *estrazione della radice cuba* dai numeri, gli *avanzi parziali* dopo la sottrazione dei *cubi* delle cifre di quella, sono molto grandi, gioverà il sapere giudicare l'esattezza di tali *avanzi* con una considerazione simile a quella già fatta nella *estrazione della radice quadra* sullo stesso proposito (73). Sia n^3 il *massimo cubo* contenuto nel nu-

mero N, che non è cubo perfetto, o in alcuna delle sue parti. La *radice* conveniente al totale N, o ad una sua parte, sarà n con un resto, che deve essere sempre minore di $3n(n+1)+1$. Supposto infatti questo avanzo, avremmo $N=n^3+3n(n+1)+1=(n+1)^3$; dunque non sarebbe n, ma sivvero $(n+1)^3$ il *massimo cubo* contenuto in N, o nella sua parte, il che è contro l'ipotesi. Resta pertanto manifesto che qualunque degli *avanzi parziali* dopo la sottrazione dei *cubi* delle cifre della *radice* non potrà mai superare $3n(n+1)$, intendendo con n il numero formato dalle cifre già trovate ad ogni passo dell'operazione, e poste sovra il segno radicale.

80. Applicando alla *radice cuba* lo stesso discorso fatto ~~per la radice cuba lo stesso discorso fatto~~ per la *radice* quadra (74, e 75) è visibile primieramente, che se N non è *cubo perfetto*, la sua radice caderà fra n, ed $n+1$ e dovendo essere pure composta dà un numero intiero, perchè N si suppone intiero, non potrà essere espressa esattamente da alcun numero frazionario intermedio fra n, ed $n+1$. Ed in secondo luogo è facile ad intendersi che volendo spingere l'approssimazione di $\sqrt[3]{N}$ fino ad un limite p di decimali, conviene moltiplicare N pel cubo 10^{3p}, e quindi dividere $\sqrt[3]{10^{3p}N}$ per 10^p. Vogliasi per esempio la *radice cuba* di 7 a meno di $\frac{1}{1000}$ di differenza. Essendo $1000=10^3$

moltiplico il 7^9 per 10, ovvero (siccome torna lo stesso) vi aggiungo *nove zeri*. Estraggo dipoi la *radice cuba* da 7000000000, e la trovo essere 1912 prossima alla vera; divido per 1000 il 1912 ed ottengo infine 1,912 per la ricercata *radice cubica* del 7, differente dalla vera meno che $\frac{1}{1000}$.

Infatti $(1,913)^3 = 7,000755497$ numero maggiore del 7.

81. Se al numero intiero N sarà unita una *frazione decimale, o propria*, si ridurrà la *frazione decimale* coll' aggiunta degli *zeri* ad avere un denominatore 10^{3p} fino al limite $\frac{1}{10^p}$; a cui si vuole spingere l' approssimazione della *radice* cercata: e se la frazione è propria si ridurrà a decimale colle stesse condizioni. La riduzione medesima si praticherà se sia data una *frazione propria*, di cui vogliasi la *radice cuba*; e quindi in tutti i citati casi si procederà al solito calcolo della *estrazione della radice*. Si tralasciano gli esempj di questi calcoli, poichè tenendo dietro a quanto è stato detto sullo stesso proposito per la *radice quadra* (76), si comprende ben tosto come debba procedersi analogamente per *l' estrazione della radice cuba* in tutti i casi qui sopra contemplati.

82. Resta a dirsi del metodo da tenersi per l' *estrazione della radice quadra, e della cuba dai polinomj algebrici*; sù di che è da avvertirsi in primo luogo, che acciò l' operazione riesca felicemente conviene che essi sieno *quadrati, e cubi perfetti*, o almeno che lo sieno per la maggior parte dei termini loro. Nel caso che un *polinomio algebrico* non sia, o non contenga un *quadrato*, o *un cubo*

perfetto, l'operazione riescirà complicatissima, e di poco frutto, così chè tornerà meglio il lasciarla annunziata col segno *radicale*. Allorchè poi si tratterà della *elevazione a qualunque potenza*, e *della respettiva estrazione di radice*, potremo conoscere il metodo di estrarre qualunque *radice* per approssimazione almeno da un *binomio*, che non sia *potenza* esatta. Questa approssimazione per la *radice quadra*, e *cuba* sarebbe qui fuori di luogo. e non se ne potrebbe parlare colla dovuta chiarezza.

Premesso ciò, *l'estrazione della radice quadra*, e *della cuba* dai *polinomj algebrici* non è dissimile dall'operazione usata qui sopra pei numeri. Conviene avere presenti le formole già stabilite (55) per la composizione del *quadrato*, e del *cubo* di un *polinomio* semplice; e quindi rintracciare col calcolo nel *polinomio* proposto i *termini* della *radice*, che si richiede. Debbasi per esempio estrarre la *radice quadra* dal seguente *polinomio* posto sotto il segno radicale.

$$a^2 - 4ab + 4b^2$$

$$\sqrt{a^4 - 8a^3b + 24a^2b^2 - 32ab^3 + 16b^4}$$

$$a^4$$

$$0$$

$$-8a^3b + 24a^2b^2$$

$$(2a^2 - 4ab)(-4ab)\ldots\ -8a^3b + 16a^2b^2$$

$$0 \quad +8a^2b^2 - 32ab^3 + 16b^4$$

$$(2a^2 - 8ab + 4b^2)\,4b^2\ldots\ldots\ +8a^2b^2 - 32ab^3 + 16b^4$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

Il primo termine a^4 dee contenere il *quadrato* del primo termine della radice, dunque questo primo termine da porsi in radice è evidentemente a^2. Nei successivi termini $-8a^3b+24a^2b^2$ dee contenersi il doppio prodotto del primo termine a^2 pel secondo incognito, ed il *quadrato* di questo. Dunque dividendo per $2a^2$ il $-8a^3b$, il quoto $-4ab$ sarà il secondo termine da porsi in radice, ed il prodotto $(2a^2-4ab)(-4ab)$ dovrà sottrarsi dai termini $-8a^3b+24a^2b^2$.

Accanto all'avanzo $+8a^2b^2$ si abbassino i termini residui $-32ab^3+16b^4$ del proposto *polinomio*, e si consideri che nel *trinomio* $8a^2b^2-32ab^3+16b^4$ debbono contenersi il doppio prodotto dei termini della *radice* a^2-4ab pel terzo incognito, ed il *quadrato* di questo. Adunque divido per $2a^2-8ab$ i termini $8a^2b^2-32ab^3$, ed il *quoto* $4b^2$ sarà il terzo termine da porsi in radice. Infatti faccio il prodotto di $(2a^2-8ab+4b^2)\,4b^2$, e trovo che esso compone appunto il *trinomio* suddivisato. Laonde conchiudo che $a^2-4ab+4b^2$ è la *radice* richiesta del proposto *polinomio*.

Sia in secondo luogo da estrarsi la *radice cuba* dal *polinomio* posto qui sotto il segno radicale.

$$x^3 - 3x^2 d + 3xd^2 - d^3$$

$$\sqrt{x^{39} - 9x^{8} d + 36x^{7} d^{2} - 84x^{6} d^{3} + 126x^{5} d^{4} - 126x^{4} d^{5} + 84x^{3} d^{6} - 36x^{2} d^{7} + 9xd^{8} - d^{9}}$$

$$x^9$$

$$3x^6 \qquad 0 - 9x^8 d$$

$$-3x^2 d \qquad -9x^8 d$$

$$0 + 36x^7 d^2 - 84x^6 d^3$$

$$27x^4 d^2 . x - (3x^2 d)^3 \ldots\ldots + 27x^7 d^2 - 27x^6 d^3$$

$$3x^6 - 18x^5 d + 27x^4 d^2 \qquad + 9x^7 d^2 - 57x^6 d^3 + 126x^5 d^4$$

$$3xd^2 \qquad + 9x^7 d^2 - 54x^6 d^3 + 81x^5 d^4$$

$$0 - 3x^6 d + 45x^5 d^4$$

$$-126x^4 d^5 + 84x^3 d^6$$

$$27x^2 d^3 (x - 3x^2 d) + (3xd^2)^3 \ldots\ldots\ldots + 27x^5 d^4$$

$$-81x^4 d^5 + 27x^3 d^6$$

$$3(x^3 - 3x^2 d + 3xd^2)$$

$$-d^3$$

$$-3x^6 d + 18x^5 d^4 - 45x^4 d^5$$

$$+57x^3 d^6 - 36x^2 d^7$$

$$-3x^6 d + 18x^5 d^4 - 45x^4 d^5$$

$$+54x^3 d^6 - 27x^2 d^7$$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad

ni $+126x^{5}d^{4}-126x^{4}d^{5}+84x^{3}d^{6}$ si debbono contenere il triplo prodotto del *quadrato* di $x^{3}-3x^{2}d$ pel terzo termine incognito della radice, dipoi il triplo prodotto di $x^{3}-3x^{2}d$ pel quadrato del terzo termine, ed il cubo di questo. Laonde divido per $3x^{6}$ il $9x^{7}d^{2}$, ed il quoto $3xd^{2}$ è il terzo termine che pongo in radice. Faccio quindi i richiesti prodotti, ed il *cubo*, come mostra l'esempio, e sottraendo il tutto dai termini omogenei del dato *polinomio*, ottengo infine l'avanzo $-3x^{6}d^{3}+18x^{5}d^{4}-45x^{4}d^{5}+57x^{3}d^{6}-36x^{2}d^{7}$.

Questo avanzo unito agli ultimi termini $-36x^{2}d^{7}+9xd^{8}-d^{9}$ dee contenere il triplo prodotto del *quadrato* di $x^{3}-3x^{2}d+3xd^{2}$ pel quarto termine incognito della *radice*, dipoi il triplo prodotto di $x^{3}-3x^{2}d+3xd^{2}$ pel *quadrato* di questo quarto termine, ed il suo *cubo*. Calcolo come in addietro, e trovo essere $-d^{3}$ il quarto termine ricercato che pongo in *radice*: e siccome fatti i richiesti prodotti ed il *cubo* l'avanzo finale è zero, conchiudo che $x^{3}-3x^{2}d+3xd^{2}-d^{3}$ è la *radice cuba* esatta del proposto *polinomio*.

Questa operazione poteva farsi ancora col modo posto in primo luogo per la formazione del *cubo* di un *polinomio* (55), ma il calcolo sarebbe riuscito alquanto più complicato.

CAP. V.

Teorica delle Equazioni di primo grado, e sua applicazione alla risoluzione dei problemi

83. Abbiamo già (48) date le definizioni riguardanti le equazioni, ed i principj dai quali dipende la risoluzione loro, specialmente allorchè non oltrepassano il primo grado. Molto rimane per altro a dire per compiere questa Teorica, e per applicarla alla soluzione dei problemi.

Incominciamo dalle *Equazioni di quoto*: da quelle cioè, in cui ciascuno dei membri altro non contiene che la divisione accennata fra due quantità, vale a dire un *rotto*. Tali sono

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\,,\quad \frac{c-a}{a^2-bx}=\frac{m-h}{c-d}\,,\ \text{e simili.}$$

Queste equazioni scritte nel modo seguente $a:b::c:d$

$$a^2-bx:c-a::c-d:m-h$$

prendono il nome di *proporzioni geometriche*, e si pronunziano così; a stà in b, come c stà in d

a^2-bx stà in $c-a$, come $c-d$ stà in $m-h$.

Il nome di *geometriche* gli conviene, perchè nella Geometria questo linguaggio delle proporzioni si adatta alle quantità che essa calcola meglio che il linguaggio delle *equazioni*.

Invece del segno $::$ pronunziato *come*, noi porremo sempre il segno $=$ collo stesso significato *come*, e ciò a fine di richiamare prontamente all' idea l' eguaglianza dei due *quoti*, che formano la proporzione.

Ognuno di questi *quoti* si chiama ancora *rapporto*, ovvero *ragione geometrica*, ed il primo ter-

mine di essa dicesi *antecedente*, il secondo *conseguente*. Considerata poi la *proporzione* intiera, il primo, ed il quarto termine diconsi gli *estremi*; il secondo, ed il terzo diconsi i *medj*. Così nella *proporzione* $a : b = c : d$ il termine a è l'*antecedente*, b è il *conseguente* della prima *ragione*: e similmente c è l'antecedente, d il conseguente della seconda *ragione*. I termini a, d sono gli *estremi*; b, c sono i *medj* di questa proporzione.

Dopo tutto ciò rimane manifesto che la *proporzione geometrica* può definirsi *l'eguaglianza di due ragioni geometriche*: ed in altre parole, *Che vi è proporzione fra quattro quantità quando la prima stà tante volte nella seconda, quante volte la terza stà nella quarta*. E' evidente che queste due definizioni combinano colla prima da noi fissata, cioè *che la proporzione geometrica* è una *equazione di quoto*. Da qui innanzi allorché diremo *proporzione* dee sempre intendersi la *proporzione geometrica*, vale a dire l'eguaglianza di due quoti.

La *proporzione* si appella *discreta* quando i suoi quattro termini sono tutti differenti fra loro; si appella *continua* se il secondo termine è lo stesso che il terzo; ed in tal caso questo termine medio ripetuto dicesi *medio proporzionale*. I numeri $4 : 16 = 5 : 20$ formano una proporzione *discreta*: i numeri $4 : 16 = 16 : 64$ formano una proporzione continua, di cui il 16 é il *medio proporzionale*.

Allorchè due termini della *proporzione* stanno fra loro come i quadrati degli altri due termini, i primi si dicono stare in *ragione duplicata* dei secondi. Così nella proporzione $a : b = c^2 : d^2$ si dice che a stà in b in *ragione duplicata* di $c : d$. Parimente se due termini della proporzione stanno come i *cubi*, come le quarte *potenze*, come le quin-

te ec. degli altri due termini, si dice che i primi due termini stanno in *ragione triplicata, quadruplicata, quintuplicata ec.* dei secondi. E viceversa se due termini di una *proposizione* stanno fra loro come le radici quadre, cube, quarte, quinte ec. degli altri due termini, si dice che i primi stanno in *ragione suddupliccata. suttiplicata, suqquadruplicata, suqquintuplicata, ec.* dei secondi.

In generale se due quantità hanno fra loro la *ragione* medesima di due prodotti di diverse quantità, si dice che le prime stanno in *ragione composta* delle quantità che formano tali prodotti. Per esempio se sia $a : b = cdef \ldots n : c'd'e'f' \ldots n'$, si dice che a stà in b in *ragione composta* di $c : c'$, di $d : d'$, di $e : e'$, di $f : f' \ldots\ldots$ di $n : n'$.

Ragione diretta è quella dell' *antecedente* al *conseguente; reciproca o inversa* è quella del *conseguente* all' *antecedente*. Perciò quando nella *proporzione* i primi due termini crescono nella medesima ragione con cui gli altri due scemano, o viceversa, si dice che i primi stanno in *ragione inversa* dei secondi. E poiche le frazioni crescono secondo chè crescono *i numeratori;* e scemano secondo chè crescono i *denominatori*, e viceversa (23); questa proprietà col linguaggio delle *proporzioni* si annunzia così: *Le frazioni stanno in ragione diretta dei numeratori, e nell' inversa dei denominatori.*

84. I teoremi relativi alle *proporzioni* si dimostrano tutti per mezzo dei principj stabiliti pelle *equazioni* (48), qualora si consideri sempre la *proporzione* come *equazione di quoto.*

Sia in generale $a : b = c : d$; cio è lo stesso che $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, Questa *equazione* moltiplicata per ac dà evidentemente $bc = ad$. Dunque in qualunque *proporzione il prodotto dei medj eguaglia il prodotto*

degli estremi. Se la proposizione sia continua, come $a : b = b : c$ si trova collo stesso discorso $ac = b^2$. Dunque nella *proporzione continua il prodotto degli estremi eguaglia il quadrato del medio.*

Allorchè nella *proporzione* sieno dati tre termini qualunque, è evidente che si potrà sempre trovare il quarto termine incognito. Così nella *proporzione* posta qui sopra, dopo averne dedotta l' *equazione* $ad = bc$, si deduce $a = \frac{bc}{d}$, $d = \frac{bc}{a}$, $\frac{ad}{c} = b$, $\frac{ad}{b} = c$, secondo che occorra trovare il valore incognito dell' uno, e dell' altro dei quattro termini proporzionali. Nella *proporzione continua* poi è visibile che $b = \sqrt{ac}$, $a = \frac{b^2}{c}$, $c = \frac{b^2}{a}$. La famosa regola detta dagli Aritmetici *aurea*, ovvero del *tre*, ed altre da essa dipendenti, di cui parleremo poco più innanzi, consistono tutte nel semplicissimo problema qui sopra enunciato, cioé; Dati tre termini *di una proporzione trovare il quarto.*

Quando quattro quantità sono tali che il prodotto di due eguagli il prodotto delle altre due, questa *equazione* si può sempre risolvere in una *proporzione*, in cui le prime due quantità sieno gli estremi, e le altre due sieno i medj, o viceversa. Abbiasi di fatto $ad = bc$, è manifesto che dividendo per ac, si trova $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$, che è quanto a dire $c : d = a : b$, ovvero $a : b = c : d$. E siccome due rotti eguali conservano l' eguaglianza se si rove-

sciano i loro termini, sarà ancora $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, cioè

$b : a = d : c$, o sivvero $d : c = b : a$

Che se in queste quattro *proporzioni* si cambiano di sito i *medi* (il che può farsi, poichè il loro prodotto resta così sempre lo stesso), avremo ancora altre quattro variazioni $c : a = d : b$

$a : c = b : d$

$b : d = a : c$

Nelle quali tutte si conserva *la proporzinalità*, perchè da ciascuna si ottiene col prodotto degli *estremi*, e dei *medj* l'*equazione stabilita* $ad = cb$. Laonde si deduce inversamente: *Che i termini di una proposta proporzione* $a : b = c : d$ *si possono variare di sito in sette differenti modi, purchè le variazioni sieno tali che il prodotto degli estremi, e dei medj sia sempre lo stesso che quello della proposta, cioè* $ad = bc$

85. Data la *proporzione* $a : b = c : d$, sono parimente in *proporzione*. Primo. La somma, o la differenza dei termini di ciascuna *ragione* al primo, o al secondo termine di loro. Secondo. La somma dei termini di ciascheduna *ragione* alla differenza di questi medesimi termini, e viceversa.

Abbiamo infatti dalla data *proporzione* la *equazione* $ad = bc$. Ma variando questa istessa *proporzione* in tutti i modi seguenti;

$a \pm b : a = c \pm d : c$ $\quad a : a \pm b = c : c \pm d$

$a \pm b : b = c \pm d : d$ $\quad b : a \pm b = d : c \pm d$

$a + b : a - b = c + d : c - d$ $\quad a - b : a + b = c - d : c + d$

Si ottiene sempre il prodotto degli *estremi* eguale a quello dei *medj*, cioè $ad = bc$. Dunque tutte queste variazioni sono altrettante *proporzioni*.

86. I medesimi quattro termini *proporzionali* $a : b = c : d$ restano in *proporzione* se per una istessa quantità si moltiplichino, o si dividano il pri-

mo, ed il secondo; oppure il terzo, ed il quarto; oppure il primo, ed il terzo; oppure il secondo, ed il quarto: come ancora moltiplicando, o dividendo uno di questi binari per una quantità, e l' altro binario per altra.

Sieno le quantità m, n due qualunque moltiplicatori, ovvero divisori, e si osservino le seguenti moltipliche, e divisioni fatte nei proposti termini *proporzionali*.

$$ma : mb = c : d \qquad ma : b = mc ; d$$
$$a : b = mc : md \qquad a : mb = c : md$$

Il comune prodotto degli *estremi*, e dei *medj* è qui, $mad = mbc$, *equazione* vera, perche $ad = bc$. Si faccia ancora;

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d \qquad \frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$$
$$a : b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m} \qquad a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}$$

Il comune prodotto degli *estremi*, e dei *medj* è qui, $\frac{ad}{m} = \frac{bc}{m}$, cioè $ad = bc$.

Facciasi inoltre;

$$ma : mb = nc : nd \qquad na : mb = nc : md$$
$$ma : nb = mc : nd \qquad ma : nb = mc : nd$$

ovvero $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n} \qquad \frac{a}{n} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{m}$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{m} : \frac{d}{n} \qquad \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{m} : \frac{d}{n}$$

Nel primo caso il prodotto degli *estremi*, e dei *medj* sarà $mnad = mnbc$; nel secondo sarà $\frac{ad}{mn} = \frac{bc}{mn}$.

Risultando adunque da tutte le precedenti moltipliche, e divisioni un composto di quattro termini tali, che dai prodotti degli *estremi* e dei *medj* si ottiene sempre l'equazione $ad = bc$, conviene con-

cludere che ciascuno di questi composti formi una *proporzione*.

Si adopra questo teorema specialmente per fare sparire le frazioni dai termini della *proporzione*, come ancora per ridurgli a più semplice espressione qualora abbiano un submultiplo comune. Sieno per esempio le proporzioni $5\frac{1}{2} : 2\frac{3}{5} = 7 : x$

$$4\frac{1}{7} : 6 = 8\frac{1}{5} : y$$

Volendo dalla prima far sparire i rotti $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$; moltiplico per 10 la prima *ragione*, e così la *proporzione* diviene senza rotti;

$$55 : 26 = 7 : x$$

Volendo dalla seconda far sparire i rotti $\frac{1}{7}; \frac{1}{5}$, moltiplico la prima *ragione* per 7, e l'altra per 5. Ottengo così senza rotti;

$$29 : 42 = 41 : 5y$$

Stando la *proporzione* $18 : 72 = 15 : x$; se dividerò la prima *ragione* per 18, essa diverrà più semplice in questa forma; $1 : 4 = 15 : x$. Potrei ancora renderla semplice dividendo per 3 il primo, ed il terzo termine, e diverrebbe così $6 : 72 = 5 : x$. In seguito dividendo per 6 la prima *ragione* avrò per ultimo resultamento $1 : 12 = 5 : x$

87. In qualunque numero di *ragioni* eguali, la somma degli *antecedenti* stà alla somma dei *conseguenti* come un *antecedente* qualunque al suo *conseguente*.

Sia per esempio $a : b = c : d = e : f = g : h$ ec.; io dico che starà, $a+c+e+g : b+d+f+h = a : b$, ed in conseguenza come ogni altro *antecedente* al suo *conseguente*. Infatti moltiplicando gli *estremi*,

abbiamo $ab+bc+be+bg$; moltiplicando i *medj* abbiamo $ab+ad+af+ah$. Ma $ab=ab$, ed attesa l' egualianza delle *ragioni* è ancora $ad=bc$, $af=be$, $ah=bg$. Dunque questi prodotti sono eguali, e perciò $a+c+e+g : b+d+f+h = a : b$ è una *proporzione*.

88. Nella *proporzione continua* $a:b=b:c$, il primo stà al ultimo termine come il quadrato del primo al quadrato del secondo, ovvero come il quadrato del secondo al quadrato del terzo.

Abbiamo infatti da questa *proporzione* $ac=b^2$, e moltiplicando per a sarà $a^2c=ab^2$. Dunque $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{c}$: o sivvero $a:c=a^2:b^2$. Ma dalla stessa *proporzione* abbiamo $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$, e perciò $\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2}{b^2}$; adunque starà ancora $a:c=b^2:c^2$

Se la *proporzione continua* prosegue per un qualunque numero n di termini come per esempio $a:b=b:c=c:d=d:e=e:f \ldots\ldots s:t$, intendendo s, t gli ultimi due termini, avremo generalmente $a^{n-1}:t^{n-1}=a^{n-1}:b^{n-1}$, ovvero come $b^{n-1}:c^{n-1}$, $c^{n-1}:d^{n-1}$ ec.

Si ponga $\frac{b}{a}=q$, sarà $b=aq$, e perciò $c=aq^2$, $d=aq^3$, $e=aq^4 \ldots\ldots t=aq^{n-1}$. Ma è eviden-

te che stà $a : aq^{n-1} = a^{n-1} : (aq)^{n-1}$. Dunque sostituendo t invece di aq^{n-1}, e b^{n-1} invece di $(aq)^{n-1}$ questa *proporzione* diverrà

$$a : t = a^{n-1} : b^{n-1}$$

E poiche dalla data *proporzione continua* risulta $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{e}{d}$ ec., sarà ancora $\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} = \frac{c^{n-1}}{b^{n-1}} = \frac{e^{n-1}}{d^{n-1}}$ ec.

Laonde starà $a : t = a^{n-1} : b^{n-1} = b^{n-1} : c^{n-1} = e^{n-1} : d^{n-1}$ ec.

Allorche nella *proporzione continua* $a : b = b : c = c : d . : . . . s : t$ si tralascia di ripetere i termini *medj*, scrivendo più semplicemente

$$a : b : c : d . . . . . t$$

essa prende il nome di *progressione geometrica*, la quale altro non è che *una serie di termini crescenti*, o *decrescienti per quoti eguali*. Sarà opportuno il trasferire di parlare di queste progressioni nel trattato generale della serie, che daremo più in avanti.

89. Già si è detto cosa è la *regola del tre*, e come essa attenga alle *proporzioni* (84). Ne daremo adesso alcuni esempj, acciò si conosca tosto qualchè applicazione della teorica qui sopra esposta.

Sia pertanto proposto di trovare il prezzo di braccia 184 di panno essendo noto che braccia 214 di questo istesso panno sono costante Lire 3638.

E' facile argomentare che le quantità di una istessa merce sono *proporzionali direttamente* ai prezzi loro. Chiamando adunque x il prezzo incognito delle braccia 184, si imposterà la seguente *proporzione*;

$$214 : 184 = 3638 : x$$

Col prodotto degli *estremi*, e dei *medj* si otterrà

$$214x = 669392$$

E quindi il prezzo incognito di braccia 184 sarà

$$x = 3128$$

In questo ed in simili esempj la *regola del tre* dicesi *diretta* perchè appunto i termini della *proporzione* sono in *ragione diretta* (83) Ma se fosse dato questo quesito. Ho misurato con una canna di braccia 6 una strada, e la ho trovata lunga canne 594. Dipoi mi sono accorto che la canna era scarsa un soldo. Potrei sapere la giusta misura di questa strada senza tornare a misurarla con una canna esatta?

Conviene qui considerare che la lunghezza della stessa strada cresce nel numero delle canne quanto queste sono più piccole, e viceversa. Dunque la lunghezza della strada stà in *ragone inversa* delle Canne adoprate per misurarla (83), e perciò in questo, ed in simili casi la *regola del tre* dicesi *inversa*, ovvero *rovescia*. Chiamata pertanto x la lunghezza della strada misurata colla canna esatta di Braccia 6; riducendo le braccia in soldi, e riflettendo che la *ragione inversa* è espressa dal denominatore dei tutti (83), si imposterà la seguente *proporzione*. $119 : 120 = \frac{1}{594} : \frac{1}{x}$

Col prodotto degli estremi, e dei *medj* ottengo

$$\frac{119}{x} = \frac{120}{594}$$

E quindi colle note regole delle equazioni

$$x = \frac{594 \times 119}{120} = 589 \cdot \frac{1}{20}$$

90. La *regola del tre* dicesi *composta* quando nella *proporzione* che adopera vi sono almeno due termini composti del prodotto di più quantità, fra le quali una sola è incognita.

Si vogliano per esempio calcolare i giorni, che dovranno impiegare 72 uomini a scavare braccia 84 di un canale lavorandovi 6 ore del giorno; avendosi fatta esperienza che 18 uomini in 15 giorni, lavorando 8 ore del giorno hanno scavato braccia 30 dello stesso canale.

E' visibile che l'opera dello scavo resulta direttamente dal prodotto dei numeri dei lavoranti, delle giornate, e delle ore giornaliere del lavoro. Adunque le due proposte lunghezze del canale sono in *ragione composta* respettivamente degli uomini, dei giorni, e dell'ore impiegate in ciascun giorno. Quindi è che, chiamando x il numero delle giornate incognite, si imposterà la seguente *proporzione*;

$$30 : 84 = 18.\ 8.\ 15 : 72.\ 6x$$

In questa, ed in altre simili *proporzioni* il metodo generale da tenersi per ritrovare il valore dell' incognita è quello di eseguire le moltipliche accennate, e quindi col prodotto degli *estremi*, e dei *medj* giungere alla *equazione risolvente*. Ma qualora si incontri, come nel caso presente, che i *fattori* di un termine abbiano un submultiplo comune coi *fattori* di altro termine vi si può applicare il principio già spiegato (83) per l'oggetto di rendere più semplici i termini di confronto, e, trascurando le moltipliche per esteso, di alleviare alquanto la fatica del calcolo.

Che però ridotta la *proporzione* superiore alla *equazione*

$$\frac{84}{30} = \frac{72 . 6x}{18 . 8 . 15}$$

si schisino i suoi rotti, ed essa diverrà

$$\frac{14}{5} = \frac{x}{5}\ ;\ \text{e quindi}\ x = 14$$

Sia ancora proposto il seguente quesito. Un muro lungo braccia 36, alto braccia 4, e grosso braccia 2 è stato costruito in 8 giorni da 6 Muratori

con 12 Manovali; Dovendosi adesso costruire altro muro alto braccia $4\frac{2}{3}$, e grosso $2\frac{1}{2}$, si domanda quante braccia in lunghezza ne potranno costruire in 9 giorni 10 Muratori con 20 Manovali.

Siccome il muramento è *proporzionale* non solo al numero dei lavoranti, e del tempo del lavoro, quanto ancora alle dimensioni dei muri dovranno farsi le *ragioni composte* di tutti questi elementi. Avremo perciò la seguente proporzione, in cui x è la lunghezza incognita del muro da costruirsi.

$$6.12.8 : 10.20.9 = 36.4.2 : 4\frac{2}{3}.x\,2\frac{1}{2}x$$

Tolte le frazioni (86) dalla seconda ragione, avrò l'*equazione* $\frac{10.20.9}{6.12.8} = \frac{14.5x}{36.4.12}$

E schisando resterà $\frac{5.5}{8} = \frac{7.5x}{18.4.12}$

Togliendo il *comune moltiplice* $\frac{5}{8}$, resterà $5 = \frac{7x}{18.6}$,

e quindi $x = 77\frac{1}{7}$

91. Allorchè più cause concorrono a produrre un effetto, e si tratti di repartire l'effetto in ragione di ciascuna delle cause, la *regola del tre* applicata a simili quesiti prende il nome di *regola di società*; ma gli converrebbe forse meglio il nome di *regola di reparto*. Debbasi per esempio risolvere questo problema;

Quattro persone hanno preso in società il cottimo della costruzione di una strada per Lire 6590. La prima di esse ne ha costruita a sue spese Canne 74, la seconda Canne 86, la terza Canne 200, e la quarta il rimanente, cioè Canne 180. Si domanda quante lire dovrà avere ciascun Cottimante in *ragione* del suo lavoro.

E' manifesto che le cause concorrenti a formare il prezzo di Lire 6590 sono i diversi tratti di strada costruita. Si dirà adunque; Come la somma dei lavori stà al prezzo totale, così ciascun lavoro parziale al suo prezzo parziale. E perciò chiamati x, y, z, u I prezzi parziali, che convengono a ciascun Cottimante, avremo le seguenti *proporzioni*.

$$\begin{array}{r} 74 \\ 86 \\ 200 \\ 180 \\ \hline 540 : 6590 \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} 74 : x \\ 86 : y \\ 200 : z \\ 180 : u \end{array} \right.$$

Da queste si dedurranno colle solite operazion

$$x = \frac{74 \cdot 659}{54} = \text{L: } 903. \frac{2}{27}$$

$$y = \frac{86 \cdot 659}{54} = 1049. \frac{14}{27}$$

$$z = \frac{200 \cdot 659}{54} = 2440. \frac{20}{27}$$

$$u = \frac{180 \cdot 659}{54} = 2196. \frac{18}{27}$$

Somma di riprova L. 6590.—

Sia proposto inoltre il problema; Tre Negozianti in società hanno guadagnato Scudi 4520. Il primo aveva posto il capitale di scudi 350 per otto mesi, il secondo scudi 425 per mesi 5, il terzo scudi 835 per mesi 2. Quanta parte del guadagno dovrà avere ciascuno?

Essendo qui le cause del guadagno in *ragione composta* del capitale, e del tempo in cui il danaro si negoziava, la *regola di reparto* in questo, ed in casi simili dicesi *composta*. Chiamate adunque

x, y, z le porzioni incognite del guadagno dovute al primo, al secondo, al terzo dei Negozianti è facile argomentare che le *proporzioni* dovranno impostarsi nel modo seguente;

$$\begin{array}{l} 8\times350 = 2800 \\ 5\times425 = 2125 \\ 2\times835 = \underline{1670} \\ \qquad\quad 6595 : 4520 = \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2800 : x \\ 2125 : y \\ 1670 : z \end{array} \right.$$

Da queste si dedurranno colle solite operazioni

$$x = \frac{904 \cdot 2800}{1319} = \text{Sdi.}\ 1919 \cdot \frac{39}{1319}$$

$$y = \frac{904 \cdot 2125}{1319} = 1456 \cdot \frac{536}{1319}$$

$$z = \frac{904 \cdot 1670}{1319} = 1144 \cdot \frac{744}{1319}$$

Somma di Riprova Sdi 4520.—

92. Dalle *equazioni di quoto* fin qui trattate sotto diversi aspetti secondo la natura dei problemi proposti, passiamo ad applicare le altre tutte di primo grado alla risoluzione di quei problemi a cui convengono, e che sono detti perciò di *primo grado*. E poichè data la *proposta* si è insegnato il metodo di giungere alla *risolvente* in tutti i casi possibili, che non eccedono il primo grado (48, e 49), basterà qui spiegare il modo col quale dal dato problema si giunge a formare la *proposta*; ovvero (come più comunemente dicesi) il modo di *porre il problema in equazione*. Ma essendo il *problema algebrico* una questione di una indefinita varietà dipendente dalle operazioni del calcolo delle quantità, non può darsi alcun metodo generale per *porlo in equazione*, e l'uso soltanto, e l'esercizio possono agevolare la pratica da tenersi; quantunque sostanzialmente essa si riduca a tradurre nel

linguaggio algebrico lo stato della questione espressa nelle parole del problema. Conviene adunque intendere bene questo linguaggio, e saperlo usare; dopo di che considerate attentamente le condizioni del problema si potranno distinguere le cognite dalle incognite, ed esprimere con segni, con lettere, e con numeri, ed in somma con tutti gli artifizi del linguaggio Algebrico i medesimi ragionamenti, e le medesime operazioni, che bisognerebbe eseguire per verificare i valori delle incognite, se essi fossero dati.

Tenendo dietro a queste generali riflessioni veniamo alla pratica di *porre il problema in equazione*; e sia primieramente proposto il seguente Problema.

Tre amici guadagnano insieme al gioco scudi 160, Il secondo guadagna scudi 8 più del primo, e la vincita del terzo eguaglia la somma delle vincite degli altri due. Quanta è la vincita di ciascuno?

Sia x la vincita incognita del primo Giocatore: la vincita del secondo, che guadagna scudi 8 più del primo sarà $x+8$: e poiche la vincita del terzo eguaglia le altre due vincite, essa sarà $2x+8$. Ma la somma delle tre vincite dee montare a scudi 160; Avremo adunque,

Vincita del primo	x
del secondo	$x+8$
del terzo	$2x+8$
Somma	$4x+16=160$

colla quale equazione sono espresse tutte le condizioni del problema. Da questa si dedurrà colle note regole la vincita del primo $x=36$, e quindi quella del secondo 44, e quella del terzo 80.

Gli Aritmetici usano ingegnosamente la *regola del tre* anche per la soluzione di tali problemi. Prendono a capriccio un qualunque numero n invece dell' incognita x, e fanno con esso tutto il calcolo

che esigono le condizioni del problema fino ad ottenere l'ultimo resultamento, che per lo più non è quello voluto dal problema medesimo. Dipoi impostano questa generale *proporzione*. Il resultamento falso ottenuto da n stà al resultamento richiesto dal problema, come il numero supposto n stà al numero incognito x, che dà la vera risoluzione. Questo ragionamento è esatto in tutti quei casi in cui il problema conduce ad un equazione coll'incognita in un solo membro moltiplicata, e divisa per altre quantità, e coll'altro membro composto di quantità note. Infatti se l'equazione sia di questa, o di simile forma, $\frac{x}{a} + \frac{bx}{c} - \frac{dx}{e} = m - h$, prendendo n invece di x avremo; $\frac{n}{a} + \frac{bn}{c} - \frac{dn}{e} = m' - h'$, in cui $m' - h'$ rappresenta il resultamento diverso dal richiesto $m - h$. Dividendo l'una equazione per l'altra si ottiene evidentemente la *proporzione* espressa di sopra, cioè $m' - h' : m - h = n : x$

Ma se l'*equazione* ha una forma diversa, e sia per esempio quella del problema precedente

$$4x + 2b = a$$

non si può col numero n sostituito ad x, e col resultamento a' dipendente da n dedurre la *proporzione* $a' : a = n : x$. Perchè in questo caso $\frac{4x + 2b = a}{4n + 2b \quad a'}$ non è risolubile nei termini *proporzionali* richiesti. E' però facile il vedere che riducendo la *proposta* alla forma prescritta, quale nel proposto esempio sarebbe $4x = a - 2b$, avremo secondo il ragionamento degli Aritmetici $a' - 2b' : a - 2b = n : x$

Vediamo adesso come questa esatta *proporzione* sciolga veramente il problema. Prendasi n eguale

ad un numero qualunque per esempio 19, avremo $a' - 2b' = 76$ resultamento falso, poiche il vero numero dee essere $a - 2b = 144$. Sostituiti questi valori nella *proporzione* di sopra, essa diverrà $76 : 144 = 19 : x$, e quindi $x = \frac{144 \times 19}{76} = 36$.

La regola del tre così applicata dicesi *regola di falsa posizione semplice*, ed il numero supposto n si chiama la *posizione*. Proponiamoci di risolvere con questa *regola* i seguenti problemi dopo che saranno posti in equazione per la loro più generale risoluzione Algebrica.

Problema II. Voglio cambiare scudi 240 in grossi, pavoli, lire, e testoni; ma vorrei lo stesso numero di ciascuna sorta di moneta. Quanti grossi, pavoli ec. dovrò ricevere?

Sia x il numero delle monete di ciascuna sorta siccome il grosso è $\frac{1}{21}$, il pavolo $\frac{2}{21}$, la lira $\frac{1}{7}$, il testone $\frac{2}{7}$ dello scudo, le condizioni del problema verranno espresse coll' equazione

$$\frac{x}{21} + \frac{2x}{21} + \frac{x}{7} + \frac{2x}{7} = 240$$

E da questa colle note regole si dedurrà $x = 420$.

Suppongasi per *falsa posizione* che l'incognita x sia il numero 10. Si sommino 10 grossi, 10 pavoli, 10 lire, e 10 testoni, e si avranno scudi $5\frac{5}{7}$, e non già scudi 240, come dovranno essere. Facciasi quindi la proporzione $5\frac{5}{7} : 240 = 10 : x$

Da questa avremo pure $x = 420$, come sopra.

Problema III. Tizio deve una somma a; ne ha già pagata una porzione, ed ha calcolato che la

frazione $\frac{p}{q}$ del residuo eguaglia la frazione $\frac{m}{n}$ di ciò che ha pagato. Si domanda quanto abbia pagato.

Dico x il denaro pagato da Tizio il resto del suo debito sara $a-x$ Ma per le condizioni del problema $\frac{mx}{n}=\frac{p}{q}(a-x)$; e di qui la *risolvente*

$$x=\frac{npa}{qm+np}.$$

Per applicare al problema *la regola di falsa posizione semplice*, conviene avvertire di porre l'equazione sotto questa forma $\frac{mx}{n}+\frac{px}{q}=\frac{ap}{q}$. Suppongo in seguito un numero qualunque x', il quale posto invece di x nella precedente dia il resultamento falso $\frac{a'p}{q}$; ed impostata la proposizione $a':a=x':x$, ottengo $x=\frac{ax'}{a'}$.

Acciò si veda che questo valore di x, ancorche espresso in termini generali, risolve veramente il problema, riflettiamo che dall'equazione $\frac{mx'}{n}+\frac{px'}{q}=\frac{a'p}{q}$ si deduce $\frac{x'}{a'}=\frac{pn}{qm+pn}$. Dunque $x=\frac{ax'}{a'}=\frac{npa}{qm+nq}$, come avevamo dalla *risolvente* di sopra.

Problema IV. Sono tre borse con diversa somma di denaro, che voglio distribuire per egual porzione in ciascuna. Perciò dalla prima borsa cavo tanto da raddoppiare i denari che sono nella seconda, e nella terza. Fatto ciò mi avvedo che nella seconda borsa vi è troppo, e ne cavo tanto da raddoppiare il denaro rimaso nella prima, e tutto quello della terza. Con questa distribuzione la terza rimane superiore alle altre due, ma cavando da

questa tanto da raddoppiare il denaro di quelle, trovo infine che in cascuna borsa sono Lire 1000. Quante lire erano da principio in ciascuna borsa?

Sieno x le lire della prima, y quelle della seconda, ed inconseguenza $3000-x-y$ le lire della terza borsa nel loro primo stato.

Dopo il vuoto fatto nella prima resteranno in questa Lire $2x-3000$. Le lire raddoppiate nella seconda borsa saranno $2y$

Nella terza saranno $6000-2x-2y$

Fatto il vuoto nella seconda borsa per raddoppiare le lire della prima, e della terza, avremo nella prima $4x-6000$

nella seconda $4y-3000$

nella terza $12000-4x-4y$

Infine raddoppiando coi denari della terza quelli della prima, e della seconda borsa, avremo la distribuzione richiesta nelle tre equazioni;

$$8x-12000=1000$$
$$8y-6000=1000$$
$$21000-8x-8y=1000$$

Dalla prima ottengo $x=1625$, dalla seconda $y=875$, e di qui deduco che nella terza borsa dovevano essere da principio Lire 500.

La *falsa posizione* richiede in questo problema un particolare artifizio. Si trovino tre numeri che abbiano le condizioni richieste nel denaro delle tre borse, e ciò potrà farsi facilmente così. Suppongo che la distribuzione eguale in ciascuna borsa non sia di Lire 1000, ma per esempio di Lire 4. Avremo adunque nella prima Lire 4,

nella seconda 4

nella terza 4

Avanti questo stato la terza coi suoi deveva raddoppiare i denari delle altre due; perciò allora

La porzione del quarto; $4b+\frac{1}{n}(x-4b-3p)$

. . . . . .

La porzione (A) dell'ultimo $mb+\frac{1}{n}(x-mb-(m-1)p)$

Si noti che l'espressione della parte (A) si trasforma in ciascuna delle espressioni precedenti soltanto che si sostituiscano ad m i numeri 1, 2, 3, 4, ec. Perciò questa espressione è il *termine generale* della serie che compongono queste porzioni; ed in conseguenza le equazioni seguenti fatte relativamente ad (A) si verificano ancora relativamente a ciascuna porzione.

Ciò posto formo l'equazione di (A) colla parte del primo, che per ipotesi debbono essere parti eguali, ed ottengo $b+\frac{1}{n}(x-b)=mb+\frac{1}{n}(x-mb-(m-1)p)$

Tolti i termini comuni ai due membri resta

$$0=(m-1)b-\frac{(m-1)}{n}(b+p),$$

E da questa colle note regole ottengo $p=b(n-1)$

Eguagliando (A) alla porzione generale p, come dee essere, avrò;

$$mb+\frac{1}{n}(x-mb-(m-1)p)=p$$

ovvero, moltiplicando per n, $mb(n-1)+x=p(n-1+m)$

Sostituendo in questa equazione $b(n-1)$ invece di p, ottengo $x=b(n-1)^2$: sostituendovi al contrario p invece di $b(n-1)$, ottengo $x=p(n-1)$

Finalmente per determinare il numero m delle persone si rifletta che nell'ultima porzione (A) la quantità $x-mb-(m-1)p$ deve essere *zero*, acciò resti esaurita tutta la somma x. Sarà perciò $mb=p$, e quindi $m=\frac{p}{b}=n-1$.

Riepilogando le tre *risolventi* $p = b\,(n-1)^2$

$$x = b\,(n-1)$$
$$m = n-1$$

si conosce il modo facilissimo di determinare le *incognite* p, x, m per mezzo delle *cognite* b, n del Problema.

La soluzione per *falsa posizione* riescirà più chiara ponendo in numeri le quantità note. Facciasi adunque $b = 80$, $n = 7$: dipoi si supponga che il numero incognito delle persone sia 4. Acciò colla porzione p dell' ultima persona rimanga esaurita tutta la somma x conviene che sia $x - 4\times 80 - 3p = 0$, e perciò $p = 4\times 80 = 320$, e quindi $x = 1280$. Ma poichè colla prima distribuzione la parte del primo deve essere 320, avremo $80 + \frac{1}{n}(1280 - 80) = 320$, e di quì $n = 5$ mentre doveva trovarsi $n = 7$. Argomento però dal calcolo fatto che il numero n supera di un unità il numero supposto m, e perciò secondo i dati del problema il numero m dovrà essere 6. Considero ancora che la somma $x = 1280$ si rileva dal numero 80 moltiplicato per 16, che è il quadrato di $m = 4$; numero supposto delle persone. Adunque, siccome secondo i dati del Problema il numero m deve essere 6 converrà che la vera somma x nasca da $m^2 = 36$. Dopo tali riflessioni formo secondo la *regola* le due seguenti proporzioni.

$$4 : 320 = 6 : p$$
$$16 : 1280 = 36 : x$$

Da queste deduco $p = 480$, $x = 2880$, coi quali numeri resta sciolto il Problema. Per altro anche in questo si vede, come nel precedente, che dopo aver di-

mostrato che il numero delle persone deve essere 6, e che la somma x si deduce dal prodotto di 80 pel quadrato di quell' numero, si trova subito senza altra *regola* $p = 6 \times 80 = 480$, ed $x = 36 \times 80 = 2880$.

93 Dalle diverse applicazioni fatte fin qui della *Regola di falsa posizione semplice* apparisce che essa è un metodo di risoluzione ristretto a pochi casi, ed è per lo più indiretto quando il problema è alquanto complicato: di modochè abbisogna quasi sempre la face del metodo analitico per spiare i passi da prendersi, acciò la *regola* riesca. Gli Aritmetici si sono studiati di renderla più generale usandovi due, e più *posizioni*, ed in questa forma l' hanno chiamata *regola di falsa posizione doppia*, ed ancora *Regola di falsa posizione composta*. Questa risolve certamente tutti i problemi di primo grado, e si può applicare con qualche successo ai problemi dei gradi superiori al primo, come vedremo a suo luogo.

Per vedere in che consista la citata *regola*, sia proposto per esempio un Problema, che conduca alle due seguenti equazioni.

$$(1)\quad ax + by = c$$
$$(2)\quad a'x + b'y = c'$$

Prendo a capriccio due numeri x', y' che sodisfacciano all' equazione (1), e dico ciascuno di questi *prima posizione*. Sostituiti x', y' invece di x, y nella equazione (2) non daranno probabilmente il resultamento c', nel qual caso sarebbe $x' = x, y' = y$, ed il problema risoluto: ma daranno un resultamento diverso da c', che chiamo R. Avrò così altre due equazioni;

$$(3)\quad ax' + by' = a$$
$$(4)\quad ax' + by' = R.$$

Dopo ciò prendo a capriccio altri due numeri

x'', y'', che parimente sodisfacciano all' equazione (1), ciascuno dei quali chiamo *seconda posizione*; e questi pure sostituiti invece di x, e di y nell' equazione (2) non daranno verisimilmente il resultamento c', ma altro diverso, che chiamo r. Avrò pertanto altre due equazioni;

$$(5)\quad ax'' + by'' = c$$
$$(6)\quad a'x'' + b'y'' = r$$

Sottraendo l'equazione (1) dalla (3), e dipoi dalla [5]; ottengo $a(x'-x) = -b'(y'-y)$, $a(x''-x) = -b(y''-y)$

E da queste deduco la proporzione

$$x'-x : x''-x = y'-y : y''-y$$

Sottraendo l' equazione (2) dalla (5), e dipoi dalla (6) ottengo;

$$a(x'-x) + b(y'-y) = R-c'$$
$$a(x''-x) + b(y''-y) = r-c'$$

In queste sostituisco ad $y'-y$ il suo valore $-\frac{a}{b}(x'-x)$; ed ad $y''-y$ il suo valore $-\frac{a}{b}(x''-x)$, ed ottengo;

$$\left(a' - \frac{ab'}{b}\right)(x'-x) = R-c'$$
$$\left(a' - \frac{ab'}{b}\right)(x''-x) = r-c'$$

E di qui le proporzioni $\left.\begin{array}{l} x'-x : x''-x \\ y'-y : y''-y \end{array}\right) = R-c' : r-c'$

Ovvero prendendo i valori di R, e di r dalla (4), e dalla (6) equazione, avrò;

$$\left.\begin{array}{l} x'-x : x''-x \\ y'-y : y''-y \end{array}\right) = a'x'+b'y'-c' : a'x''+b'y''-c'$$

Le quantità $a'x'+b'y'-c'$, $a'x''+b'y''-c'$ si dicono *gli errori*, e saranno *positivi*, o *negativi* secondo che c' è minore, o maggiore della som-

ma dei termini precedenti Fatto adunque in generale,

$$a'x'+b'y'-c'=\pm E$$
$$a'x''+b'y''-c'=\pm e$$

le proporzioni di sopra diverranno;

$$\left.\begin{matrix} x'-x : x''-x \\ y'-y : y''-y \end{matrix}\right) = \pm E : \pm e$$

Dalle quali si deduce

$$x = \frac{\pm Ex'' \mp ex'}{\pm E \quad \pm e} \qquad y = \frac{\pm Ey'' \mp ey'}{\pm E \quad \mp e}$$

Non è difficile estendere lo stesso ragionamento a tutti i problemi di primo grado, che abbiano un qualunque numero di incognite, ed altrettante equazioni. Infatti eliminando col noto metodo (49) tutte le incognite fuori che due, per esempio x, y, risulteranno due equazioni di questa forma.

$$(1)\ Ax+By=C$$
$$(2)\ Ax+By=C'$$

Sostituendo in queste due posizioni x', x'' invece di x collo stesso metodo usato di sopra, avrò le proporzioni;

$$x'-x : x''-x = y'-y : y''-y$$

$$\left.\begin{matrix} x'-x : x''-x \\ y'-y : y''-y \end{matrix}\right) = \pm E : \pm e$$

E sarà $\mp E = A'x'+B'y'-C'$, $\mp e = Ax''+B'y''-C'$

Se invece di lasciare x, y nelle equazioni (1), (2) avessi lasciate le incognite y, z, dipoi z, t, e così fino all' ultima incognita, che chiamo ω, avrei ottenuto collo stesso calcolo

$$y'-y : y''-y = z'-z : z''-z = t'-t : t''-t$$
$$\ldots\ldots = \omega'-\omega : \omega''-\omega$$

Perciò gli stessi errori $\pm E$ $\pm e$ bastano a determinare tutte quante le incognite colle propor-

sioni

$$\left.\begin{array}{l} x'-x : x''-x \\ y'-y : y''-y \\ z'-z : z''-z \\ t'-t : t''-t \\ \ldots\ldots\ldots \\ \omega'-\omega : \omega''-\omega \end{array}\right\} = \pm E : \pm e$$

Dalle quali si otterrà come sopra

$$x = \frac{\pm E x'' \mp e x'}{\pm E \mp e}$$

$$y = \frac{\pm E y'' \mp e y'}{\pm E \mp e}$$

$$z = \frac{\pm E z'' \mp e z'}{\pm E \mp e}$$

$$t = \frac{\pm E t'' \mp e t'}{\pm E \mp e}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\omega = \frac{\pm E \omega'' \mp e \omega'}{\pm E \mp e}$$

Le proporzioni precedenti dimostrano il teorema generale, da cui dipende essenzialmente la *regola* di cui si tratta. Risulta da quelle „ *Che nei problemi di primo grado gli errori sono proporzionali alle differenze fra le posizioni, e l' incognita repettiva, che rappresentano.* Gli Aritmetici per altro trascurano di considerare l' enunciato teorema, e non ostante pongono fra le *regole di proporzione* questa di falsa *posizione composta*: e siccome l' equazioni finali;

$$x = \frac{\pm E x'' \mp e x'}{\pm E \mp e}\ ;\ y = \frac{\pm E y'' \mp e y'}{\pm E \mp e}\ ;\ z = \frac{\pm E z'' \mp e z'}{\pm E \mp e}\ \text{ec.}$$

sono conseguenze necessarie del teorema medesimo, fondano in queste la loro *regola* compartita nei seguenti articoli.

1°. Con due numeri presi ad arbitrio, detti in generale *posizioni* si tenti la soluzione del problema, come se ciascuno fosse una delle incognite.

2° Si notino gli errori $\pm E$, $\pm e$, cioe le differenze fra gli erronei risultamenti finali ottenuti da ciascuna delle posizioni, e quelli richiesti dal problema.

3° Si facciano i prodotti del primo errore $\pm E$ per la seconda *posizione*, e del secondo errore $\pm e$ per la prima *posizione*.

4°. Se gli *errori* sono ambedue positivi, o ambedue *negativi* si divida la differenza dei già fatti prodotti per la differenza degli *errori*; Se poi gli *errori* hanno segno diverso la somma dei prodotti medesimi si divida per la somma degli *errori*. L'uno, e l'altro di questi *quoti* darà nei due diversi casi il valore di quell' incognita, a cui la regola è applicata;

5°. Qualora il Problema abbia più incognite, ed altrettante equazioni, si riducano queste a due con due incognite, eliminando tutte le altre, e vi si applichi la *regola* esposta nei precedenti articoli. Gli stessi *errori*, che conducono ad investigare il valore di una delle due incognite lasciate, basteranno a determinare tutte le altre.

Vediamo adesso un esempio pratico di questa *regola* in un problema con cinque incognite, che suppongo conduca alle cinque seguenti equazioni.

$$3x+2y+4z+st-2u=29$$
$$4x-5y+2z+3t-u=7$$
$$5x+4y-3z+4t-3u=5$$
$$6x+3y-2z-6t-4u=10$$
$$2x+3y-4z+6t+8u=12$$

Eliminando tutte le incognite fuori che x, y ottengo le due equazioni;

$$(1)\ 96x-373y=-660$$
$$(2)\ 160x-601y=-1042$$

Dipoi per fissare i valori di ciascuna posizione per le altre incognite trovo le equazioni;

(3) $12y - t = 20$

(4) $5z + 2t = 23$

(5) $17u - 10t = 45$

Suppongo $x' = 2$, e quindi deduco dalla equazione

(1) $y' = \frac{842}{373}$

Dalla equazione (2) $E = -5\frac{119}{373}$

Dalla equazione (3) $t' = \frac{2644}{373}$

Dalla equazione (4) $z' = \frac{3291}{1865}$

Dalle equazione (5) $u' = \frac{43225}{6341}$

Suppongo $x'' = 3$, e come sopra deduco dall'equazione

(1) $y'' = \frac{938}{373}$

Dalla equazione (2) $e = -10\frac{238}{373}$

Dalla equazione (3) $t'' = \frac{3796}{373}$

Dalla equazione (4) $z'' = \frac{987}{1865}$

Dalla equazione (5) $u'' = \frac{54746}{6341}$

Ora, poichè stà evidentemente $E : e = 1 : 2$, avrò a norma della *regola* le equazioni risolventi

$$x = 2x' - x'' = 1$$

$$y = 2y' - y'' = \frac{646}{373} = 2$$

$$z = 2z' - z'' = \frac{5595}{1865} = 3$$

$$t = 2t' - t'' = \frac{1492}{373} = 4$$

$$u = 2u' - u'' = \frac{31705}{6341} = 5$$

94. Per quanto ingegnosa, e generale sia la *regola di falsa posizione composta*, bisogna pur convenire che senza la face dell'analisi riescirà molto prolissa, e confusa a misura che i problemi saranno più complicati. La teorica della eliminazione delle incognite le presta altresì tanto d'ajuto, che allora quando si applica la regola il problema di più incognite è quasi disciolto. Laonde per la soluzione di simili problemi non vi è metodo più diretto, ne più spedito di si fatta teorica, di cui abbiamo dato qualche spiegazione, ed alcuni esempj numerici (48), e che adesso riprenderemo per dimostrarla accuratamente.

Sieno proposte a risolversi le seguenti equazioni di numero $m+1$ con altrettante incognite;

$$ax + bx' + cx'' \ldots\ldots + v\overset{(m)}{x} = \delta$$

$$a'x + b'x' + c'x'' \ldots\ldots + v'\overset{(m)}{x} = \delta'$$

$$a''x + b''x' + c''x'' \ldots\ldots + v''\overset{(m)}{x} = \delta''$$

$$\vdots$$

$$\overset{(m)}{a}\,x + \overset{(m)}{b}x' + \overset{(m)}{c}\,x'' \ldots\ldots + \overset{(m)}{v}\,\overset{(m)}{x} = \overset{(m)}{\delta}$$

Dal metodo di eliminazione finquì praticato risulta che il valore di ciascuna incognita si ottiene riducendo le *proposte* equazioni ad altrettante *risolventi*

di questa forma;

$$A x = D'$$
$$A' x' = D$$
$$A'' x'' = D''$$
$$\vdots$$
$$A^{(m)} x^{(m)} = D^{(m)}$$

In queste ciascuno dei coefficienti A, A' .... $A^{(m)}$ dee essere composto di tutti i coefficienti $a, b, c \ldots v$; a'. b', $c' \ldots v$; ..... $a^{(m)}$. $b^{(m)}$, $c^{(m)}$ . . . . $v^{(m)}$: altrimenti le *proposte* potrebbero sussistere o lasciando, o variando a capriccio qualunque di questi coefficienti, il che è assurdo. E siccome per giungere alle *risolventi* tante sono le moltipliche, e le sottrazioni, quante sono le incognite, i coefficienti A, $A' \ldots A^{(m)}$ corrisponderanno a questo principio nel modo il più semplice quando ciascuno di loro sia composto di termini alternativamente *positivi e negativi*, formati dai prodotti $ab'c'' \ldots v^{(m)}$, $ba'c'' \ldots v^{(m)}$ ec di tante *dimensioni* quante sono le incognite, ed in cui le lettere sieno tutte diversamente combinate con gli *indici* disposti secondo la serie naturale dei numeri 0, 1, 2, 3 ec. In quanto poi alle quantità D, $D' \ldots D^{(m)}$ è facile persuadersi che debbano contenere questi medesimi prodotti, escluse però le lettere, che sono coefficienti dell' incognita cercata, e sostituite in vece loro le lettere $\delta' \ldots \delta^{(m)}$. Infatti allorchè si incomincia ad eliminare per esempio x si moltiplicano *le proposte* per a, a', $a'' \ldots a^{(m)}$; dipoi per eliminare x' si moltiplicano per quei nuovi coef-

ficienti che ha x' dopo l'eliminazione di x; e così di seguito le equazioni successive si moltiplicano sempre pei successivi coefficienti delle incognite da eliminarsi: di modo chè le quantità δ, $\delta' \ldots \delta^{(m)}$ non sono mai moltiplicate pei coefficienti dell' incognita cercata, che in ultimo resta sola.

95. Premessi questi essenziali, ed evidenti principj, intendo colle lettere ϕ, ϕ', $\phi'' \ldots \phi^{(m)}$ altrettante quantità composte di diversi prodotti dei coefficienti delle incognite (eccetto quelli dell' incognita che si cerca) formati a norma delle condizioni qui sopra enunciate, e di altre da spiegarsi in appresso. Queste quantità si possono chiamare con vocabolo proprio, e generale *funzioni dei coefficienti*, e perciò le darò in seguito questo nome. Moltiplicando la prima delle *proposte* per ϕ, la seconda per ϕ', la terza per ϕ'' ec, e sommandole avrò

$$\left.\begin{array}{l} x\,(a\phi + a'\phi + a''\phi'' \ldots + a^{(m)}\phi^{(m)} \\ + x''(b'\phi + b'\phi' + b''\phi'' \ldots + b^{(m)}\phi^{(m)} \\ + x''(c\phi + c'\phi' + c''\phi \ldots + c^{(m)}\phi^{(m)} \\ \quad \vdots \\ + x^{m}(\ v\phi + v'\phi' + v''\phi \ldots + v^{(m)}\phi^{(m)} \end{array}\right\} = \delta\phi + \delta'\phi' + \delta''\phi'' \ldots + \delta^{(m)}\phi^{(m)}$$

Questa generale equazione darà il valore di ciascuna incognita qualora le *funzioni* ϕ, $\phi' \ldots \phi^{(m)}$ siano determinate in modo, che mandino a *zero*

i coefficienti di tutte, eccetto il coefficiente dell' incognita cercata. Adunque le condizioni, ovvero (come meglio dicesi) le *equazioni di condizione* per determinare la x sono;

$$(1)\ a\varphi + a'\varphi' + a''\varphi'' \ldots + a^{(m)}\varphi^{(m)} = A$$
$$b\varphi + b'\varphi' + b''\varphi'' \ldots + b^{(m)}\varphi^{(m)} = 0$$
$$c\varphi + c'\varphi' + c''\varphi'' \ldots + c^{(m)}\varphi^{(m)} = 0$$
$$\vdots$$
$$v\varphi + v'\varphi + v''\varphi'' \ldots + v^{(m)}\varphi^{(m)} = 0$$

Per determinare x' sono

$$(2)\ b\varphi + b'\varphi' + b''\varphi'' \ldots + b^{(m)}\varphi^{(m)} = A'$$
$$a\varphi + a'\varphi' + a''\varphi'' \ldots + a^{(m)}\varphi^{(m)} = 0$$
$$c\varphi + c'\varphi' + c''\varphi'' \ldots + c^{(m)}\varphi^{(m)} = 0$$
$$\vdots$$
$$v\varphi + v'\varphi' + v''\varphi'' \ldots + v^{(m)}\varphi^{(m)} = 0$$

Per determinare x'' sono

$$(3)\ c\varphi + c'\varphi' + c''\varphi'' \ldots + c^{(m)}\varphi^{(m)} = A''$$
$$a\varphi + a'\varphi' + a''\varphi'' \ldots + a^{(m)}\varphi^{(m)} = 0$$
$$b\varphi + b'\varphi' + b''\varphi'' \ldots + b^{(m)}\varphi^{(m)} = 0$$
$$\vdots$$
$$v\varphi + v'\varphi' + v''\varphi'' \ldots + v^{(m)}\varphi^{(m)} = 0$$

erano nella prima Lire 2
nella seconda 2
nella terza 8

Ma questa distribuzione è succeduta perche la seconda ha raddoppiato coi suoi i denari delle altre due borse. Dunque avanti questa distribuzione erano

nella prima L. 1
nella seconda 7
nella terza 4

E perché nella prima distribuzione dalla prima borsa si cavarono tanti denari da raddoppiare le lire delle altre due, lo stato primitivo delle borse doveva essere in tal modo:

nella prima L. $6\frac{1}{2}$
nella seconda $3\frac{1}{2}$
nella terza 2

Trovati così i tre numeri $6\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, 2, che sodisfanno alle condizioni del problema nell'ipotesi che la distribuzione eguale del denaro fosse di L. 4 per ciascuna borsa, si impostino secondo la *regola* le due seguenti proporzioni, nelle quali x, y rappresentano i numeri incogniti delle lire contenute da principio nella prima, e nella seconda borsa.

$$4 : 6\frac{1}{2} = 1000 : x$$

$$4 : 3\frac{1}{2} = 1000 : y$$

Da queste si dedurranno $x = 1625$, $y = 875$, e quindi la somma contenuta nella terza borsa di L. 500, come appunto si era trovato di sopra.

E' d'altronde visibile che facendo sul dato numero 1000 lo stesso calcolo fatto sul numero ipotetico 4, avremmo tosto trovato senza altra regola i resultamenti richiesti. 1625, 865, 500 invece dei numeri $6\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, 2.

Problema V. Tizio vuole distribuire frà alcune persone una somma di denaro, dimodoche la prima abbia una porzione b, e $\frac{1}{n}$ del residuo, la seconda abbia dipoi $2b$, ed $\frac{1}{2}$ del residuo, e così progressivamente $3b$, ed $\frac{1}{n}$ del residuo la terza, $4b$, ed $\frac{1}{n}$ del residuo la quarta ec. finochè tutta la somma sia esaurita. Si domanda qual debba essere questa somma, e quale il numero delle persone, acciò le parti di ciascuna sieno eguali.

Chiamo x la somma richiesta, m il numero delle persone, p la parte eguale di ciascuna. Siccome il primo dee avere b, ed $\frac{1}{n}$ di ciò che resta della somma x, e questa porzione deve eguagliare quella di ciascun' altro, sarà la parte del primo espressa in questo modo; $b+\frac{1}{n}(x-b)=p$

E perchè il secondo deve avere $2b$, ed $\frac{1}{n}$ del resto della somma x tolta la parte del primo, e tolto $2b$, la sua parte sarà così espressa; $2b+\frac{1}{n}(x-2b-p)$

Così argomentando a seconda delle condizioni del problema, la porzione del terzo sarà

$$3b+\frac{1}{n}(x-3b-2p)$$

La porzione del quarto; $4b+\frac{1}{n}(x-4b-3p)$

. . . . . .

La porzione (A) dell'ultimo $mb+\frac{1}{n}(x-mb-(m-1)p)$

Si noti che l'espressione della parte (A) si trasforma in ciascuna delle espressioni precedenti soltanto che si sostituiscano ad m i numeri 1, 2, 3, 4, ec. Perciò questa espressione è il *termine generale* della serie che compongono queste porzioni; ed in conseguenza le equazioni seguenti fatte relativamente ad (A) si verificano ancora relativamente a ciascuna porzione.

Ciò posto formo l'equazione di (A) colla parte del primo, che per ipotesi debbono essere parti eguali, ed ottengo $b+\frac{1}{n}(x-b)=mb+\frac{1}{n}(x-mb-(m-1)p)$

Tolti i termini comuni ai due membri resta

$$0=(m-1)b-\frac{(m-1)}{n}(b+p),$$

E da questa colle note regole ottengo $p=b(n-1)$

Eguagliando (A) alla porzione generale p, come dee essere, avrò;

$$mb+\frac{1}{n}(x-mb-(m-1)p)=p$$

ovvero, moltiplicando per n, $mb(n-1)+x=p(n-1+m)$

Sostituendo in questa equazione $b(n-1)$ invece di p, ottengo $x=b(n-1)^2$: sostituendovi al contrario p invece di $b(n-1)$, ottengo $x=p(n-1)$

Finalmente per determinare il numero m delle persone si rifletta che nell'ultima porzione (A) la quantità $x-mb-(m-1)p$ deve essere *zero*, acciò resti esaurita tutta la somma x. Sarà perciò $mb=p$, e quindi $m=\frac{p}{b}=n-1$.

Riepilogando le tre *risolventi* $p = b\,(n-1)^2$

$$x = b\,(n-1)$$
$$m = n-1$$

si conosce il modo facilissimo di determinare le *incognite* p, x, m per mezzo delle *cognite* b, n del Problema.

La soluzione per *falsa posizione* riescirà più chiara ponendo in numeri le quantità note. Facciasi adunque $b = 80$, $n = 7$: dipoi si supponga che il numero incognito delle persone sia 4. Acciò colla porzione p dell' ultima persona rimanga esaurita tutta la somma x conviene che sia $x - 4 \times 80 - 3p = 0$, e perciò $p = 4 \times 80 = 320$, e quindi $x = 1280$. Ma poichè colla prima distribuzione la parte del primo deve essere 320, avremo $80 + \frac{1}{n}(1280 - 80) = 320$, e di quì $n = 5$ mentre doveva trovarsi $n = 7$. Argomento però dal calcolo fatto che il numero n supera di un unità il numero supposto m, e perciò secondo i dati del problema il numero m dovrà essere 6. Considero ancora che la somma $x = 1280$ si rileva dal numero 80 moltiplicato per 16, che è il quadrato di $m = 4$; numero supposto delle persone. Adunque, siccome secondo i dati del Problema il numero m deve essere 6 converrà che la vera somma x nasca da $m^2 = 36$. Dopo tali riflessioni formo secondo la *regola* le due seguenti proporzioni.

$$4 : 320 = 6 : p$$
$$16 : 1280 = 36 : x$$

Da queste deduco $p = 480$, $x = 2880$, coi quali numeri resta sciolto il Problema. Per altro anche in questo si vede, come nel precedente, che dopo aver di-

mostrato che il numero delle persone deve essere 6, e che la somma x si deduce dal prodotto di 80 pel quadrato di quell' numero, si trova subito senza altra *regola* $p = 6 \times 80 = 480$, ed $x = 36 \times 80 = 2880$.

93 Dalle diverse applicazioni fatte fin qui della *Regola di falsa posizione semplice* apparisce che essa è un metodo di risoluzione ristretto a pochi casi, ed è per lo più indiretto quando il problema è alquanto complicato: di modochè abbisogna quasi sempre la face del metodo analitico per spiare i passi da prendersi, acciò la *regola* riesca. Gli Aritmetici si sono studiati di renderla più generale usandovi due, e più *posizioni*, ed in questa forma l' hanno chiamata *regola di falsa posizione doppia*, ed ancora *Regola di falsa posizione composta*. Questa risolve certamente tutti i problemi di primo grado, e si può applicare con qualche successo ai problemi dei gradi superiori al primo, come vedremo a suo luogo.

Per vedere in che consista la citata *regola*, sia proposto per esempio un Problema, che conduca alle due seguenti equazioni.

$$(1)\ ax + by = c$$
$$(2)\ a'x + b'y = c'$$

Prendo a capriccio due numeri x', y' che sodisfacciano all' equazione (1), e dico ciascuno di questi *prima posizione*. Sostituiti x', y' invece di x, y nella equazione (2) non daranno probabilmente il resultamento c', nel qual caso sarebbe $x' = x$, $y' = y$, ed il problema risoluto: ma daranno un resultamento diverso da c', che chiamo R. Avrò così altre due equazioni;

$$(3)\ ax' + by' = c$$
$$(4)\ ax' + b'y' = R.$$

Dopo ciò prendo a capriccio altri due numeri

x'', y'', che parimente sodisfacciano all' equazione (1), ciascuno dei quali chiamo *seconda posizione*; e questi pure sostituiti invece di x, e di y nell' equazione (2) non daranno verisimilmente il resultamento c', ma altro diverso, che chiamo r. Avrò pertanto altre due equazioni;

$$(5)\quad ax'' + by'' = c$$
$$(6)\quad a'x'' + b'y'' = r$$

Sottraendo l'equazione (1) dalla (3), e dipoi dalla (5); ottengo $a(x'-x) = -b'(y'-y)$, $a(x''-x) = -b(y''-y)$

E da queste deduco la proporzione

$$x'-x : x''-x = y'-y : y''-y$$

Sottraendo l' equazione (2) dalla (5), e dipoi dalla (6) ottengo;

$$a(x'-x) + b(y'-y) = R - c'$$
$$a(x''-x) + b(y''-y) = r - c'$$

In queste sostituisco ad $y'-y$ il suo valore $-\frac{a}{b}(x'-x)$; ed ad $y''-y$ il suo valore $-\frac{a}{b}(x''-x)$, ed ottengo;

$$\left(a' - \frac{ab'}{b}\right)(x'-x) = R - c'$$
$$\left(a' - \frac{ab'}{b}\right)(x''-x) = r - c'$$

E di qui le proporzioni $\left.\begin{array}{l} x'-x : x''-x \\ y'-y : y''-y \end{array}\right) = R - c' : r - c'$

Ovvero prendendo i valori di R, e di r dalla (4), e dalla (6) equazione, avrò;

$$\left.\begin{array}{l} x'-x : x''-x \\ y'-y : y''-y \end{array}\right) = a'x' + b'y' - c' : a'x'' + b'y'' - c'$$

Le quantità $a'x' + b'y' - c'$, $a'x'' + b'y'' - c'$ si dicono *gli errori*, e saranno *positivi*, o *negativi* secondo che c' è minore, o maggiore della som-

ma dei termini precedenti Fatto adunque in generale,

$$a'x'+b'y'-c'=\pm E$$
$$a'x''+b'y''-c'=\pm e$$

le proporzioni di sopra diverranno;

$$\left.\begin{array}{l} x'-x : x''-x \\ y'-y : y''-y \end{array}\right) = \pm E : \pm e$$

Dalle quali si deduce

$$x = \frac{\pm Ex''\mp ex'}{\pm E \quad \pm e} \qquad y = \frac{\pm Ey''\mp ey'}{\pm E \quad \mp e}$$

Non è difficile estendere lo stesso ragionamento a tutti i problemi di primo grado, che abbiano un qualunque numero di incognite, ed altrettante equazioni. Infatti eliminando col noto metodo (49) tutte le incognite fuori che due, per esempio x, y, risulteranno due equazioni di questa forma.

$$(1)\ Ax+By=C$$
$$(2)\ Ax+By=C'$$

Sostituendo in queste due posizioni x', x'' invece di x collo stesso metodo usato di sopra, avrò le proporzioni;

$$x'-x : x''-x = y'-y : y''-y$$

$$\left.\begin{array}{l} x'-x : x''-x \\ y'-y : y''-y \end{array}\right) = \pm E : \pm e$$

E sarà $\mp E = A'x'+B'y'-C'$, $\mp e = Ax''+B'y''-C'$

Se invece di lasciare x, y nelle equazioni (1), (2) avessi lasciate le incognite y, z, dipoi z, t, e così fino all' ultima incognita, che chiamo ω, avrei ottenuto collo stesso calcolo

$$y'-y : y''-y = z'-z : z''-z = t'-t : t''-t$$
$$\ldots\ldots\ldots = \omega'-\omega : \omega''-\omega$$

Perciò gli stessi errori $\pm E$ $\pm e$ bastano a determinare tutte quante le incognite colle propor-

zione $a\phi + a'\phi' \ldots\ldots + a^{(m)}\phi^{(m)} = 0$, e quindi anderanno pure *a zero*, in virtù delle *funzioni* così variate, anche le successive *equazioni di condizione*, da cui dipende il valore di x'. Peraltro i prodotti $b\phi$, $b'\phi' \ldots b^{(m)}\phi^{(m)}$ della equazione (2) avranno i loro termini identici a quelli dell'equazione (1), ma disposti con segni contrari. Per convincersene basta esaminare solo il primo binomio di $b\phi$ nella equazione (2), che sarà $b(a'c'' \ldots u^{(m-1)} v^{(m)} - a'c'' \ldots v^{(m-1)} u^{(m)})$: questo istesso binomio trovasi il primo di $a'\phi'$ dell'equazione (1), ma con segni opposti, cioè $a'(bc'' \ldots v^{(m-1)} u^{(m)} - bc'' \ldots u^{(m-1)} v^{(m)}$. E perchè dal primo binomio di $b\phi$ prendono norma anche riguardo al segno tutti i termini delle *funzioni* dell'equazione (2), è manifesto che sarà nel totale $A' = -A$

Acciò l'equazione (2) divenga la (3) conviene cambiare i moltiplicatori $b, b' \ldots b^{(m)}$ in $c, c' \ldots c^{(m)}$, e dalle *funzioni* $\phi, \phi' \ldots \phi^{(m)}$ escludere la lettera c, e sostituirvi la b colli stessi indici. Adunque ragionando come sopra, le *equazioni di condizione* per determinare x'' dopo la prima anderanno tutte a *zero*, e sarà in quella $A'' = -A' = A$. Seguitando lo stesso discorso sù tutte l'*equazioni di condizione*, che determinano le altre incognite $x''', x''' \ldots x^{(m)}$, resta universalmente dimostrato che esse si annullano tutte, esclusa la prima, e che calcolato il primo coefficiente A, sarà alternativamente

$A' = -A$, $A'' = A$, $A''' = -A$, ed infine $A^{(m)} = \pm A$; prendendo il segno $+$ se m è numero pari, ed il segno $-$ se è dispari.

Che però indicando le *funzioni* $\varphi, \varphi' \ldots \varphi^{(m)}$ col segno Σ preposto al primo binomio di ciascuna per annunziare la somma di tutti i termini derivanti da quello secondo la legge insegnata, e componenti ciascuna *funzione*, le *proposte* equazioni di qualunque numero $m+1$, danno generalmente le *risolventi* espresse nella forma che segue.

$$Ax = \left\{ \begin{array}{l} \delta\Sigma(b'c''\ldots u^{(m-1)} v^{(m)} - b'c''\ldots v^{(m-1)} u^{(m)} \\ +\delta'\Sigma(bc''\ldots v^{(m-1)} u^{(m)} - bc''\ldots u^{(m-1)} v^{(m)} \\ \mp\delta^{(m)}\Sigma(bc'\ldots u^{(m-2)} v^{(m-1)} - bc'\ldots v^{(m-2)} u^{(m-1)} \end{array} \right\}$$

$$Ax' = \left\{ \begin{array}{l} \delta\Sigma(a'c''d'''\ldots u^{(m-1)} v^{(m)} - a'c''d'''\ldots v^{(m-1)} u^{(m)} \\ +\delta'\Sigma(ac''d'''\ldots v^{(m-1)} u^{(m)} - ac''d'''\ldots u^{(m-1)} v^{(m)} \\ \pm\delta^{(m)}\Sigma(ac'd''\ldots u^{(m-2)} v^{(m-1)} - ac'd''\ldots v^{(m-2)} u^{(m-1)} \end{array} \right\}$$

$$Ax'' = \left\{ \begin{array}{l} \delta\Sigma(a'b''d'''\ldots u^{(m-1)} v^{(m)} - a'b''d'''\ldots v^{(m-1)} u^{(m)} \\ +\delta'\Sigma(ab''d'''\ldots v^{(m-1)} u^{(m)} - ab''d'''\ldots u^{(m-1)} v^{(m)} \\ \pm\delta^{(m)}\Sigma(ab'd'''\ldots u^{(m-2)} v^{(m-1)} - ab'd'''\ldots v^{(m-2)} u^{(m)} \end{array} \right\}$$

$$-Ax''' = \left\{ \begin{array}{l} \delta\Sigma(a'b''c'''e''''\ldots \overset{(m-1)}{u}\ \overset{(m)}{v} - a'b''c'''e''''\ldots \overset{(m-1)}{v}\ \overset{(m)}{u} \\ +\delta'\Sigma(ab''c'''e''''\ldots \overset{(m-1)}{v}\ \overset{(m)}{u} - ab''c'''e''''\ldots \overset{(m-1)}{v}\ \overset{(m)}{u} \\ \quad\vdots \\ \pm\delta^{(m)}\Sigma(ab'c''e'''\ldots \overset{(m-2)}{u}\ \overset{(m-1)}{v} - ab'c''e'''\ldots \overset{(m-2)}{v}\ \overset{(m-1)}{u} \end{array} \right\}$$

$$\vdots$$

$$\pm Ax^{(m)} = \left\{ \begin{array}{l} \delta\Sigma(a'b''\ldots \overset{(m-1)}{t}\ \overset{(m)}{u} - a'b''\ldots \overset{(m-1)}{u}\ \overset{(m)}{t} \\ +\delta'\Sigma(ab''\ldots \overset{(m-1)}{u}\ \overset{(m)}{t} - ab''\ldots \overset{(m-1)}{t}\ \overset{(m)}{u} \\ \quad\vdots \\ \pm\delta^{(m)}\Sigma ab'\ldots \overset{(m-2)}{t}\ \overset{(m-1)}{u} - ab'\ldots \overset{(m-2)}{u}\ \overset{(m-1)}{t} \end{array} \right\}$$

Prendendo al solito il segno $+$ nel caso di m numero pari, ed il segno $-$ nel caso di m dispari.

98 Per dilucidare maggiormente questa teorica, applichiamola ad un esempio pratico, e sieno proposte a risolversi le seguenti sette equazioni con altrettante incognite.

$$x+2x'-3x''+4x'''-5x''''+x'''''+x''''''=-20$$
$$2x-x'-4x''+3x'''-x''''+5x'''''+6x''''''=4$$
$$3x-4x'+3x''-2x'''+7x''''-x'''''-4x''''''=9$$
$$x-3x'+2x''-5x'''+6x''''-3x'''''-7x''''''=-4$$
$$4x+3x'-x''-3x'''+5x''''-2x'''''-5x''''''=13$$
$$4x-2x'+3x''-4x'''+2x''''-3x'''''-4x''''''=2$$
$$8x-4x'+2x''-3x'''+x''''-2x'''''-x''''''=6$$

Volendo direttamente le *risolventi* di queste equazioni dovremmo calcolare tutte le combinazioni dei sette coefficienti di ciascuna incognita presi a sette, a sette, il che ammonterebbe all' enorme numero di termini 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. = 5040. Per diminuire la lunghezza del calcolo può usarsi l'artifizio di trasportare dal primo al secondo membro in ciascuna delle *proposte* un certo numero di incognite, e quindi calcolare le *risolventi* per le sole incognite lasciate nel primo membro. Dipoi sostituendo nelle *proposte* i valori delle incognite già trovati, si formeranno altre equazioni fra quelle sole incognite trasportate nel secondo membro; rispetto alle quali rinnovato il calcolo istesso, si otterranno tutte le *risolventi* richieste. Potendo farsi questa trasposizione in più modi, prescegliero i due seguenti riguardo alle sette equazioni di sopra sostituendo ai coefficienti numerici dei primi membri le lettere a, b, c ec, a'; b', c' ec, ed intendendo colle lettere δ, δ', δ'' ec. gli intieri polinomj dei secondi membri Pongo adunque;

Nel primo modo

$$ax+bx'+cx''+dx'''+ex''''=\delta$$
$$a'x+b'x'+c'x''+d'x'''+e'x''''=\delta'$$
$$a''x+b''x'+c''x''+d''x'''+e''x''''=\delta''$$
$$a'''x+b'''x'+c'''x''+d'''x'''+e'''x''''=\delta'''$$
$$a''''x+b''''x'+c''''x''+d''''x'''+e''''x''''=\delta''''$$
$$a'''''x+b'''''x'=\delta'''''$$
$$a''''''x+b''''''x=\delta''''''$$

Nel secondo

$$ax+bx'+cx''+dx'''=\delta$$
$$a'x+b'x'+c'x''+d'x'''=\delta'$$
$$a''x+b''x'+c''x''+d''x'''=\delta''$$
$$a'''x+b'''x'+c'''x''+d'''x'''=\delta'''$$
$$a''''x+b''''x'+c''''x''=\delta''''$$
$$a'''''x+b'''''x'+c'''''x''=\delta'''''$$
$$a''''''x+b''''''x'+c''''''x''=\delta''''''$$

La formole delle *risolventi* delle sette equazioni ridotte nel primo modo, sono;

$$Ax = \begin{cases} \delta\Sigma(b'c''d'''e'''' - b'c''e'''d'''') \\ +\delta'\Sigma(bc''e'''d'''' - bc''d'''e'''') \\ +\delta''\Sigma(bc'd''e'''' - bc'e''d'''') \\ +\delta'''\Sigma(bc'e''d'''' - bc'd''e'''') \\ +\delta''''\Sigma(bc'd''e'' - bc'e''d'') \end{cases}$$

$$Ax'' = \begin{cases} \delta\Sigma(a'b''d''e'''' - a'b''e''d'''') \\ +\delta'\Sigma(a'b''e''d'''' - ab''d''e'''') \\ +\delta''\Sigma(ab'd''e'''' - ab'e''d'''') \\ +\delta'''\Sigma(ab'e''d'''' - ab'd''e'''') \\ +\delta''''\Sigma(ab'd''e''' - ab'e''d''') \end{cases}$$

$$Ax''' = \begin{cases} \delta\Sigma(a'b''c'''d'''' - a'b''d''c'''') \\ +\delta'\Sigma(ab''d''c'''' - ab''c'''d'''') \\ +\delta''\Sigma(ab'c'''d'''' - ab'd''c'''') \\ +\delta'''\Sigma(ab'd''c'''' - ab'c''d'''') \\ +\delta''''\Sigma(ab'c''d''' - ab'd''c''') \end{cases}$$

$$-Ax' = \begin{cases} \delta\Sigma(a'c''d'''e'''' - a'c''e'''d'''') \\ +\delta'\Sigma(ac''e'''d'''' - ac''d''e'''') \\ +\delta''\Sigma(ac'd'''e'''' - ac'd''e'''') \\ +\delta'''\Sigma(ac'e''d'''' - ac'd''e'''') \\ +\delta''''\Sigma(ac'd''e''' - ac'e''d'') \end{cases}$$

$$-Ax'' = \begin{cases} \delta\Sigma(a'b''c'''e'''' - a'b''e'''c'''') \\ +\delta'\Sigma(ab''e'''c'''' - ab''c'''e'''') \\ +\delta''\Sigma(ab'c'''e'''' - ab'e'''c'''') \\ +\delta'''\Sigma(ab'e''c'''' - ab'c''e'''') \\ +\delta''''\Sigma(ab'c''e''' - ab'e''e''') \end{cases}$$

$$Ax = \delta'''''b''''' - d'''''b''''$$

$$-Ax' = \delta'''''a''''' - d'''''a''''$$

Nelle prime cinque il coefficiente

$$A=\left\{\begin{array}{l} a\Sigma(b'c''d'''e''''-b'c''e'''d'''' \\ +a'\Sigma(bc''e'''d''''-bc''d'''e'''' \\ +a''\Sigma(bc'd'''e''''-bc'e'''d'''' \\ +a'''\Sigma(bc'e''d''''-bc'd''e'''' \\ +a''''\Sigma(bc'd''e'''-bc'e''d''' \end{array}\right.$$

Nelle ultime due il coefficiente $A=a''''b''''-a'''''b'''$

Le formole delle *risolventi* delle sette equazioni ridotte nel secondo modo sono;

$$Ax=\left\{\begin{array}{l} \delta\Sigma(b'c''d'''-b'd''c''' \\ +\delta'\Sigma(bd'c'''-bc''d''' \\ +\delta''\Sigma(bc'd'''-bd'c''' \\ +\delta'''\Sigma(bd'e''-be'd'' \end{array}\right.$$

$$Ax'=\left\{\begin{array}{l} \delta\Sigma(a'b''d'''-a'd''b''' \\ +\delta'\Sigma(ad''b'''-ab''d''' \\ +\delta''\Sigma(ab'd'''-ad'b''' \\ +\delta'''\Sigma(ad'b''-ab'd'' \end{array}\right.$$

$$-Ax''=\left\{\begin{array}{l} \delta\Sigma(a'c''d'''-a'd''c''' \\ +\delta\Sigma(ad''c'''-ac''d''' \\ +\delta''\Sigma(ac'd'''-ad'c''' \\ +\delta'''\Sigma(ad'c''-ac'd'' \end{array}\right.$$

$$-Ax'''=\left\{\begin{array}{l} \delta\Sigma(a'b''c'''-a'c''b''' \\ +\delta'\Sigma(ac''b'''-ab''c''' \\ +\delta''\Sigma(ab'c'''-ac'b''' \\ +\delta'''\Sigma(ac'd''-ab'c'' \end{array}\right.$$

$$Ax=\delta''''(b''''c'''''-c''''b''''')+\delta'''''(c''''b'''''-b''''c''''')$$
$$+\delta'''(b'''c''''-c'''b''''')$$

(n

-1

2-1

-1

-1

-1

-1

$$-Ax'=\delta''''(a'''''e'''''-c'''''a''''')+\delta'''''(c'''a'''''-a'''c''''')$$
$$+\delta'''''(a'''c'''''-c'''a''''')$$
$$Ax''=\delta''''(a''''b'''''-b''''a''''')+\delta'''''(b'''a'''''-a'''b''''')$$
$$+\delta'''''(a''''b'''''-b'''''a''''')$$

Nelle prime quattro risolventi il coefficiente $A=\begin{cases} a\Sigma(b'c''d'''-b'd''c''') \\ +a'\Sigma(bd''c'''-bc''d''') \\ +a''\Sigma(b'c'd'''-bd'c''') \\ +a'''\Sigma(bd'c''-bc'd'') \end{cases}$

Nelle ultime tre il coefficiente $A=a''''(b''''c'''''-c''''b''''')$
$+a'''''(c''''b'''''-b''''c''''')+a'''''(b''''e'''''-e''''b''''')$

Calcoliamo primieramente il coefficiente $A=a''''$ $\Sigma(b'c''d''e''''-b'c''e''d'''')+ec.$ a fine di risolvere le equazioni ridotte nel primo modo. Nella annessa tavola abbiamo a bella posta segnati per esteso tutti i termini di questo coefficiente, e perciò rammentandosi che;

$a=1$, $b=2$, $c=-3$, $d=4$, $e=-5$
$a'=2$, $b'=-1$, $e'=-4$, $d'=3$, $e'=-1$
$a''=3$, $b''=-4$, $c''=3$, $d''=-2$, $e''=7$
$a'''=1$, $b'''=-3$ $c'''=2$, $d'''=-5$, $e'''=6$
$a''''=4$, $b''''=3$, $c''''=-1$, $d''''=-3$, $e''''=5$
$a'''''=4$, $b'''''=-2$
$a''''''=8$, $b''''''=-4$

E ponendo per commodo del calcolo i termini di $\Phi=\Sigma(b'c''d'''e''''-b'c''e''d'''')$ sotto la forma seguente, avremo;

$$b'e''(d'''e''''-e'''d'''')+b'c'''(e''d''''-d''e''')+b'c''''$$
$$(d'e'''-e''d''')=66$$
$$c'b''(e'''d''''-d'''e'''')+c'b'''(d'e''''-e''d'''')+c'b''''$$
$$(e''d'''-d''e''')=520$$
$$d'b''(e'''e''''-e'''c'''')+d'b'''(e''c''''-c''e'''')+d'b''''$$
$$(c''e'''-e''c''')=42$$
$$e'b''(d'''e''''-c'''d'''')+e'b'''(c''d''''-d''c'''')+e'b''''$$
$$(d''e'''-c''d''')=-22$$
$$\Sigma(b'c''d'''e''''-b'c''e''d'''')=606$$

Troveremo collo stesso metodo

$$\Sigma(bc''d'''e''''-bc''d'''e'''')=-204$$
$$\Sigma(bc'd'''e''''-bc'e'''d''')=\ 138$$
$$\Sigma(bc'e'\,d'''-bc'd'\,e'''')=\ 300$$
$$\Sigma(bc'd''e'''-bc'e''d'')=\ 12$$

Avremo quindi $A=960$, e per conseguenza la prima *risolvente* sarà

$$960x=606\delta-204\delta'+138\delta''+300\delta'''+12\delta''''$$

Rammentandosi inoltre che, $\delta=-20-x''''-x''''$

$$\delta'=\ 4-5x''''-6x''''$$
$$\delta''=\ 9+x''''+4x''''$$
$$\delta'''=-4+3x''''+7x''''$$
$$\delta''''=13+2x''''+5x''''$$

e sostituendo questi valori nella precedente equazione divisa per 6, si avrà;

$$160x=246x''''+555x''''-2123$$

Collo stesso calcolo applicato alle altre quattro *Risolventi* si otterrà: $40x'=241-2x''''-25x''''$

$$48x''=58x''''-85x''''-213$$
$$96x'''=1101-154x''''-301x''''$$
$$96x''''=1497-146x''''-281x''''$$

Calcolando in seguito il coefficiente $A=a''''b''''-b''''a''''$, si trova $A=0$: in conseguenza $\delta''''b''''-\delta''''b''''=0$, $\delta''''a''''-\delta''''a''''=0$, e da queste l'unica equazione $\delta''''-2\delta''''=0$. Da ciò parrebbe doversi inferire che il problema delle sette proposte equazioni fosse indeterminato, poiche così le *risolventi* sarebbero sei con sette incognite. Che però per fuggire tale difficoltà si prendano le due equazioni, da cui dipende A, cioè $a''''x+b''''x'=\delta''''$, $a''''x-b''''x'=\delta''''$, nelle quali $\delta''''=2-3x''+4x'''-2x''''+3x''''+4x''''$, $\delta''''=b-2x''+3x'''-x''''+2x''''+x''''$. Sostituendo i valori numerici dei coefficienti a'''', a'''', b'''', b'''', ed i valori precedentemente trovati delle incognite x, x', x'', x''', x'''', le due precedenti equazioni diver-

ranno; $246x''''' + 555x''''' = 2283$

$778x''''' + 1885x''''' = 7869$

E da queste $x''''' = -2$, $x''''' = 5$, i quali valori posti nelle prime cinque *risolventi* di sopra danno $x = 1$, $x' = 3$, $x'' = 2$, $x''' = -1$, $x'''' = 4$.

Passando adesso a risolvere le medesime sette equazioni ridotte nel secondo modo, incomincio dal calcolare il coefficiente

$$A = \begin{cases} \begin{matrix} (b'c''d''' - b'd''c''') \\ a(d'b''c''' - c'b''d''') \\ (c'd''b''' - d'c''b''') \end{matrix} + a' \begin{matrix} (bd''c''' - bc''d''') \\ (cb''d''' - db''c''') \\ (dc''b''' - cd''b''') \end{matrix} \\ \\ + a'' \begin{matrix} (bc'd''' - bd'c''') \\ (db'c''' - cb'd''') \\ (cd'b''' - dc'b''') \end{matrix} + a''' \begin{matrix} (bd'c'' - bc'd'') \\ (cb'd'' - db'c'') \\ (dc'b'' - cd'b'') \end{matrix} \end{cases}$$

Sostituiti alle lettere i loro valori numerici troveremo per mezzo delle formole già segnate le prime quattro *risolventi*, come appresso;

$50x = 35\delta - 12\delta' + 7\delta'' + 18\delta'''$, $100x' = 65\delta - 38\delta' - 7\delta'' + 32\delta'''$

$5x'' = -\delta' + \delta'' - \delta'''$; $20x''' = -5\delta + 2\delta' + 3\delta'' - 8\delta'''$

L'altro coefficiente A per le ultime tre *risolventi* sarà;

$a''''(b''''c''''' - c''''b''''') + a'''''(c''''b''''' - b''''c''''') + a'''''(b''''c''''' - c''''b''''') = 80$

E quindi calcolate le formole già trovate di queste *risolventi*, si otterrà;

$80x = 8\delta'''' - 2\delta''''' + 7\delta'''''$

$5x' = \delta'''' + \delta''''' - \delta'''''$

$4x'' = 2\delta''''' - \delta'''''$

Rammentando che

$\delta = -20 + 5x'''' - x''''' - x'''''$, $\delta' = 4 + x''''' + 6x''''' - 6x''''$

$\delta'' = 9 - 7x''''' + x''''' + 4x'''''$; $\delta''' = -4 - 6x''''' + x''''' - x'''''$

$\delta'''=13+3x'''-5x''''+2x''''+5x''''',\delta''''=2+4x''$
$-2x''''+3x''''+4x'''''$
$\delta'''''=6+3x'''-x'''+2x''''+x''''',$

Sostituisco questi valori nelle *risolventi* e dipoi eguagliando fra loro i doppj valori di x, x', x'' dati da quelle, ottengo le tre equazioni.

$$904x''''+3234x''''+719x'''''=33243$$
$$248x''''+258x''''+403x'''''=2491$$
$$4x''''+44x''''+79x'''''=323$$

Rinnovato il calcolo sù queste secondo le formole medesime già stabilite per le ultime tre *risolventi*, trovo come sopra $x'''=4$, $x''''=-2$, $x'''''=5$; e sostituiti infine questi valori nelle prime quattro *risolventi*, ottengo $x=1$, $x'=3$, $x''=2$, $x'''=-1$.

L'artifizio usato per diminuire il calcolo aritmetico nella risoluzione delle sette equazioni proposte si può evidentemente applicare con successo ai problemi determinati di primo grado, qualunque sia il numero delle incognite loro.

CAP. VI.

Risoluzione Algebrica delle equazioni di secondo terzo, e quarto grado, che contengono una sola incognita

99. Già si è detto (48) che il *grado* delle equazioni con una sola incognita è enunciato dal massimo *esponente* di questa. Le equazioni di cui si tratta diconsi *ordinate* quando posti tutti i termini loro nel primo membro resta il secondo eguale a *zero:* e quando inoltre i termini sono disposti in modo che gli *esponenti* dell' incognita vadano per ordine numerico dal massimo al minimo, ed il primo termine abbia per coefficiente l' unità. Posto ciò la formola, che esprime qualunque equazione

ordinata del *grado* m^{simo}, sarà del seguente tenore;

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots + T = 0$$

Se vi sono gli *esponenti* tutti da m, $m-1$ ec. fino a *zero* l'equazione dicesi *completa*; se ne mancano alcuni intermedj fra m, e *zero*, dicesi *incompleta*. *L'* equazione di *grado* superiore al primo é risoluta allorchè sono trovati tutti i *fattori* di primo *grado*, che la compongono. Si suppone adunque che la *proposta* $x^m + Ax^{m-1} \ldots + T = 0$ risulti dal prodotto di un numero m di *fattori* di primo *grado*, come $(x+a)(x+b)(x+c \ldots (x+t) = 0$, e la sua risoluzione consiste nel trovare per mezzo dei coefficienti noti A, B, $C \ldots T$ le quantità incognite a, b, $c \ldots t$, le quali diconsi *radici* della equazione. E' visibile che il numero di queste sarà pure m, e basta che un solo dei *fattori* $x+a$, $x+b$, ec. sia eguale a *zero* perchè lo sia tutto il prodotto loro, che forma l'equazione. Sarebbe ancora assurdo il supporre eguale a *zero* più di un *fattore*, se pure alcune radici non fossero eguali fra loro: supponendo per esempio $x+a=0$, $x+b=0$, $x+c=0$ è evidente che dovrebbe essere $a=b=c$:

Effettuando la moltiplicazione accennata $(x+a)(x+b)(x+c) \ldots (x+t) = 0$, si forma l'equazione;

$$\begin{array}{llll}
x^m & +a)\,x^{m-1} & +ab)\,x^{m-2} & +abc)\,x^{m-3} \ldots +abcd \ldots t = 0 \\
 & +b) & +ac) & +abd) \\
 & +c) & +ad) & +acd) \\
 & +d) & +bc) & +bcd) \\
 & \vdots\ ) & +bd) & +\text{ec.}) \\
 & +t)+\text{ec.} & +cd) &)
\end{array}$$

Da ciò risulta, che il coefficiente A eguaglia la somma delle *radici* $a+b+c \ldots +t$, che in appresso esprimerò col segno Σa; il coefficiente B egua-

glia la somma di tutti i prodotti *binari* delle *radici*, che noterò più semplicemente col segno Σab il coefficiente C eguaglia la somma di tutti i prodotti *ternari*, che noterò col segno Σabc; e così di seguito fino all'ultimo termine $T = abcd \ldots t$ che è il prodotto di tutte le *radici*.

Si facciano frattanto due facili osservazioni molto utili nel progresso di questa teorica. 1ma Che i coefficienti A, B, C, ... T sono altrettante *funzioni* fisse, o come dicono *invariabili* delle *radici* della proposta. 2da Che ciascun termine della *proposta* del *grado m* ha lo stesso numero *m* di *dimensioni*, e che di queste il coefficiente A ne ha una, B ne ha due, C ne ha tre, e l'ultimo coefficiente T ne ha *m*

Parrebbe a prima vista che essendo tante le *radici* della *proposta*, quanti sono i suoi coefficienti A, B, C ... T, si potessero quelle immediatamente dedurre dalle equazioni;

$$\begin{aligned} \Sigma a &= A \\ \Sigma ab &= B \\ \Sigma abc &= C \\ \Sigma abcd &= D \\ &\vdots \\ abcd \ldots t &= T \end{aligned}$$

Ma è facile persuadersi che sviluppando queste equazioni per lasciare sola una qualunque delle *radici* a, b, $c \ldots t$ si ritorna ad una equazione simile in tutto alla *proposta*, onde è che la difficoltà di determinare così le *radici* è la stessa che quella di determinare direttamente l'incognita x. Vogliasi per esempio ricavare il valore della radice a dalle premesse equazioni. Moltiplico la prima per

a^{m-1}, la seconda per $-a^{m-2}$, la terza per a^{m-3}, la quarta per $-a^{m-4}$, e così alternativamente fino all' ultima, che moltiplico per $\mp a^{0} = \mp 1$, in cui si dovrà prendere il segno — se m è numero pari, ed il segno + se è dispari. Notando per maggior semplicità col segno Σb la somma delle *radici* esclusa la a; col segno Σbc la somma dei loro prodotti *binari* esclusi quelli formati con a; col segno Σbcd la somma dei prodotti *ternari* esclusi quelli formati con a, e così di seguito, ottengo i prodotti seguenti;

$$a^{m-1}\ \Sigma a = a^{m} + a^{m-1}\ \Sigma b = Aa^{m-1}$$

$$a^{m-2}\ \Sigma ab = -a^{m-1}\ \Sigma b - a^{m-2}\ \Sigma bc = -Ba^{m-2}$$

$$a^{m-3}\ \Sigma abc = a^{m-2}\ \Sigma bc + a^{m-3}\ \Sigma bcd = Ca^{m-3}$$

$$-a^{m-4}\ \Sigma abcd = -a^{m-3}\ \Sigma bcd - a^{m-4}\ \Sigma bcde = -Da^{m-4}$$

$$\vdots$$

$$\pm abcd\ldots t = \pm T$$

Sommando tutte queste equazioni, e dipoi trasportando nel primo tutti i termini del secondo membro, avrò infine;

$$a^{m} - Aa^{m-1} + Ba^{m-2} - Ca^{m-3} + Da^{m-4} \ldots \pm T = 0$$

prendendo riguardo all' ultimo termine il segno + nel caso di m numero pari, ed il segno — nel caso di m dispari.

Quest' ultima equazione è la stessa della *proposta*

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots\ldots + T = 0$ colla sola diversità dei segni alternativi $+$, $-$: e tale dee essere se si rifletta, che posto il *fattore* $x + a = 0$, ne risulta $x = -a$. Ponendo adunque $-a$ in luogo di x nella *proposta* è manifesto che essa si cangia nella precedente.

Qualora le equazioni $\Sigma a = A$, $\Sigma ab = B$ ec in vece di a^{m-1}, $-a^{m-2}$ ec. fossero state moltiplicate per le stesse potenze di qualunque altra delle *radici* b, c, $d \ldots t$ è evidente che avremmo avuto lo stesso resultamento, cioè;

$$b^m - Ab^{m-1} + Bb^{m-2} \ldots\ldots \mp T = 0$$

$$c^m - Ac^{m-1} + Bc^{m-2} \ldots\ldots \pm T = 0$$

$$\vdots$$

$$t^m - At^{m-1} + Bt^{m-2} \ldots\ldots \mp T = 0$$

Che però dee conchiudersi (come ho premesso poco sopra) che dai coefficienti A, B, $C \ldots T$ non si puo immediatamente dedurre il valore Algebrico di alcuna *radice* della *proposta*. Questa imponente difficoltà ha posto a tortura l' ingegno dei più valenti Mattematici: gli Antichi sono ricorsi ad alcune proprietà particolari della seconda, terza, e quarta *potenza* per mezzo delle quali hanno risoluto felicemente le equazioni dal secondo al quarto *grado* inclusivamente: i Moderni prendendo il problema nell' aspetto il più generale hanno tentato di scoprire se era possibile ridurre la *proposta* di qualunque *grado* ad altra equazione di nota soluzione,

i di cui coefficienti fossero *funzioni* cognite di quelli dati A, B, C ... T. Il nostro metodo darà un idea del sistema tenuto dagli uni, e dagli altri.

100. L'equazione di secondo grado a due termini, $x^2 - A = 0$ si risolve senza difficoltà nei suoi *fattori* di primo *grado* (53) $(x+\sqrt{A})(x-\sqrt{A})=0$. ed in conseguenza $\sqrt{A}$, $-\sqrt{A}$ sono le sue *radici*. Allorche poi l'equazione è *completa*, come

$$x^2 + Ax + B = 0$$

Si riduce alla forma di sopra compiendo il quadrato del *binomio* $x^2 + Ax$ (54), e per non turbare l'egualità si ripete con segno opposto il termine aggiunto. Così infatti la *proposta* diventa;

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{4} + B = 0,$$

ovvero supposto $y = x + \frac{A}{2}$, essa rimane con un solo termine incognito, cioè;

$$y^2 - \frac{A^2}{4} + B = 0$$

I due *fattori* di questa sono evidentemente $(y+\sqrt{\frac{A^2}{4}-B})(y-\sqrt{\frac{A^2}{4}-B})=0$, ovvero rimettendo $x+\frac{A}{2}$ in luogo di y, $(x+\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}-B})$ $(x+\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}-B})=0$, e quindi le due *radici* sono espresse dal doppio segno posto al radicale in

questo modo; $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{(\frac{A^2}{4} - B)}$

Se invece di compiere il quadrato si sostituisca $y - \frac{A}{2}$ invece di x nella *proposta*, si ottiene tosto l'equazione di sopra; $y^2 - \frac{A^2}{4} + B = 0$.

Possono adunque risolversi l'equazioni di secondo grado col metodo di *sostituire all'incognita x altra incognita y unendo a questa la metà del coefficiente A col segno cambiato*. Così svanisce il secondo termine Ax, e rimane l'equazione immediatamente risolubile nei suoi *fattori* di primo *grado*. Si può ancora giungere alla stessa soluzione considerando che la proposta $x^2 + Ax + B = 0$ è il prodotto dei fattori $(x + x')(x + x'')$, in cui $x' + x'' = A$, $x'x'' = B$ (99) Chiamando y una funzione indeterminata di A, e di B è facile vedere che acciò sia $x' + x'' = A$ deo essere $x' = \frac{A}{2} + y$, $x'' = \frac{A}{2} - y$, e quindi $x'x'' = B = \frac{A^2}{4} - y^2$. Adunque $y = \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}$

Donde immediatamente deducesi come sopra $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}$

Ambedue le *radici* $-\frac{A}{2} \pm \sqrt{(\frac{A^2}{4} - B)}$ sostituite in luogo della x sodisfanno egualmente alle condizioni della *proposta*. Abbiamo infatti con tale sostituzione; $x^2 = \frac{A^2}{2} \mp A\sqrt{(\frac{A^2}{4} - B)} - B$

$$Ax = -\frac{A^2}{2} \pm A\sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - B\right)}.$$

E sommando sarà $x^2 + Ax = -B$, ovvero $x^2 + Ax + B = o$.

Di quì è che l'equazioni di secondo *grado*, ed i problemi che ne dipendono hanno due soluzioni. Possono queste essere ambedue *positive*, o *negative* secondochè le *radici* $-\frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - B\right)}$ abbiano amendue un valore *positivo*, o *negativo*. Che se l'uno di questi fosse *positivo*, e l'altro *negativo*, la radice *negativa* rovescia i dati del problema riguardo alla somma, ed alla sottrazione; cambiando l'una nell'altra, e perciò dicesi *che la radice negativa risolve il problema inverso*, di cui daremo qualche esempio per meglio dilucidare questa espressione. Infine se la quantità $\frac{A^2}{4} - B$ sotto il segno radicale riesce *negativa*, allora il suo valore è *immaginario* (63), e tali sono conseguentemente le *radici* della *proposta*; il che dimostra essere impossibile la soluzione del problema dipendente da quella. Veniamo all'applicazione di questa teorica.

Problema I. *Trovare due numeri, di cui sia data la somma, e la ragione dei loro quadrati.*

Chiamo a la data somma; una delle sue parti x, l'altra $a - x$. Siccome la ragione data deve essere fra i due quadrati x^2, $(a - x)^2$, può rappresentarsi coll'espressione generale $1 : m^2$. Avremo adunque l'equazione di quoto (83)

$$\frac{x^2}{(a-x)^2} = m^2 \text{, ovvero } \frac{x^2}{(a-x)^2} - m^2 = 0$$

Questa equazione a due termini dà visibilmente i due *fattori*;

$$\left(\frac{x}{a-x} + m\right)\left(\frac{x}{a-x} - m\right) = 0$$

Per ricavare da essi il doppio valore della x, si faccia $\frac{x}{a-x} \pm m = 0$, e da questa equazione di primo *grado* dedurremo agevolmente $x = \frac{\mp am}{1 \mp m}$.

Prendendo il segno $+$, cioé il valore *positivo* $x = \frac{am}{1+m}$, l'altra parte del numero a, cioè $a - x$, sarà $\frac{a}{1+m}$; ed avremo conforme richiede il Problema

$$\frac{x^2}{(a-x)^2} = \frac{a^2 m^2}{a^2} = m^2.$$

Prendendo altresì il valore *negativo* $x = -\frac{am}{1-m}$, sarà $a - x = \frac{a}{1-m}$; e si avrà pure con queste quantità;

$$\frac{x^2}{(a-x)^2} = \frac{a^2 m^2}{a^2} = m^2.$$

Si osservi per altro che le quantità $\frac{a}{1-m}$; $-\frac{am}{1-m}$ avendo segni contrarj, non esprimono propriamente il numero a formato colla loro somma, ma bensì colla loro differenza. Quindi è che col valore negativo della x il problema è sciolto *inversamente*, vale a dire co' dati così cambiati. *Trovare due nu-*

meri, di cui sia data la differenza, e la ragione dei loro quadrati.

Se avessi moltiplicata per $(a-x)^2$, o che lo stesso, per $a^2-2ax+x^2$ l'equazione primitiva $\frac{x^2}{(a-x)^2}-m^2=0$, avrei ottenuto $x^2(1-m^2)+2am^2x-a^2m^2=0$;

Parragonando questa equazione *completa* colla *proposta* generale di secondo *grado* $x^2+Ax+B=0$ dalla quale risulta $x=-\frac{A}{2}\mp\sqrt{(\frac{A^2}{4}-B)}$, si deduce senza difficoltà $x=-\frac{am^2}{1-m^2}\pm\sqrt{(\frac{a^4m^2}{(1-m^2)^2}+\frac{a^2m^2}{1-m^2})}$

Questo doppio valore della x sembra molto differente da quello ottenuto colla prima soluzione: ma riducendo allo stesso denominatore le frazioni poste sotto il segno radicale, e dipoi estraendo la radice, resterà primieramente;

$$x=\frac{-am^2\mp am}{1-m^2}$$

Dipoi cangiando il numeratore $-am^2\pm am$ in $am(-m\pm1)$, ed il denominatore $1-m^2$ in $(1+m)(1-m)$, avremo $x=\frac{am(-m\mp1)}{(1+m)(1-m)}$.

E quindi prendendo nel ∓1 il segno $+$; sarà $x=\frac{am}{1+m}$, prendendo il segno $-$, sarà $x=\frac{-am}{1+m}$.

valori identici a quelli della prima soluzione.

Supponendo $m=1$, l'equazione $x=\frac{-am \pm am^2}{1-m^2}$ preso il segno $+$ diventa $x=\frac{0}{0}$; preso il segno $-$ diventa $x=-\frac{2a}{0}$. Ho già insegnato (60) che la prima di queste espressioni accenna un valore indeterminato della x, che può calcolarsi trovando un *submultiplo* comune ai termini della frazione $\frac{-am+am}{1-m^2}$ divenuta $\frac{0}{0}$; questo *submultiplo* è manifestamente $1-m=0$ e perciò nella nostra ipotesi, $x=\frac{a}{1+m}=\frac{a}{2}$. Resultamento, che evidentemente risolve il problema colla condizione di $m=1$.

L'altra espressione $x=-\frac{2a}{0}$ dipendente dal valore *negativo* dell'incognita, indica l'*infinito* (60): e tali veramente debbono essere due quantità x, $x-a$ la cui differenza sia a, e sieno eguali i quadrati loro, conforme significa l'ipotesi di $m=1$. E' visibile infatti che acciò sia $x^2=(x-a)^2$ conviene che la quantità finita a svanisca rispetto alla x; dunque x deve essere infinita.

Problema II *Sono stati seminati tre campi a grano. Se ogni staro di seme del primo producesse un terzo del seme gettato negli altri due, si raccoglierebbero in quello stara* 80. *Se ogni staro di seme del secondo campo producesse la metà del seme degli altri due, si raccoglierebbero in quello stara* 156. *E finalmente se ogni staro di seme del terzo cam-*

po producesse un quarto del seme gettato negli altri due, si raccoglierebbero in quello stara 90. Quante stara sono state seminate in ciascuno dei tre campi?

Sieno x, y, z le tre diverse quantità di seme gettato in ciascun campo.

Per la prima condizione abbiamo; $x\frac{(y+z)}{3}=80$

Per la seconda $y\frac{(x+z)}{2}=156$

Per la terza $z\frac{(x+y)}{4}=90$

Moltiplico la prima equazione per 3, la seconda per 2, la terza per 4 a fine di togliere le frazioni, ed eseguisco le moltipliche accennate colle parentesi. Ottengo così;

$$xy+xz=240$$
$$xz+zy=312$$
$$xy+zy=360$$

Sommando le prime due, e dipoi sottraendole la 3a. si ottiene $2xy=192$

Sommando la 1a. colla 3a., e dipoi sottraendone la 2a. si ottiene $2xz=288$

Sommando la 2a. colla 3a., e dipoi sottraendone la 1a. si ottiene $2yz=432$

Dividendo per 2 ciascuna di queste equazioni resterà

$$xy=96$$
$$xz=144$$
$$yz=216$$

Moltiplico frà loro le prime due di queste ultime ridotte, e sostituisco il numero 216 in luogo del prodotto yz. Avrò così $216x^2=144\times96$, e quindi $x^2=64$, $x=\pm8$

Colla sostituzione di questo doppio valore di x nelle stesse prime due equazioni trovo $y=\pm12$, $z=\pm18$. Tanto i valori *positivi*, quanto i *negativi* delle tre incognite così determinate sodisfanno egualmente al problema.

Problema III. *Estrarre la radice quadrata dal binomio* $a + \sqrt{b}$

La radice del proposto binomio dee contenere due termini di questa forma $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, perchè appunto il quadrato $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$, cioè $x + y + 2\sqrt{xy}$ è composto di una parte *razionale* $x + y$, e può farsi eguale ad a, e di altra *irrazionale* $2\sqrt{xy}$, che può eguagliarsi all' omogenea quantità $\sqrt{b}$ Supposto adunque $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{(a + \sqrt{b})}$, avremo le due equazioni;

$$x + y = a$$
$$4xy = b$$

Preso dalla seconda il valore di y, e dipoi di x, e sostituiti ciascuno nella prima, ottengo;

$$x + \frac{b}{4x} = a, \quad y + \frac{b}{4y} = a$$

Moltiplicando la prima per x, l'altra per y, ed *ordinandole*, ottengo;

$$x^2 - ax + \frac{b}{4} = 0, \quad y^2 - ay + \frac{b}{4} = 0$$

Queste danno due valori *identici* tanto per la x, che per la y, i quali significano che se per x si prende il radicale col segno $+$, si dee prendere per y col segno $-$, o viceversa; altrimenti le incognite non sarebbero due, ma si ridurrebbero ad una sola contro l'ipotesi. Avremo adunque;

$$x = \frac{a + \sqrt{(a^2 - b)}}{2}, \quad y = \frac{a - \sqrt{(a^2 - b)}}{2}$$

Quindi è che la radice del binomio $a + \sqrt{b}$, ovvero $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ sarà;

$$(A) \quad \sqrt{\frac{a + \sqrt{(a^2 - b)}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{(a^2 - b)}}{2}}$$

Questa espressione (A) così in generale è più complicata della *proposta* $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$; ma ogni qualvolta a^2-b sia un quadrato ed il calcolo si applichi ad un binomio numerico, l'espressione anzidetta diviene più semplice, e dà realmente l'estrazione della radice, che sfuggirebbe al metodo già spiegato (72).

Debbasi per esempio estrarre la radice del binomio $34+2\sqrt{-35}$). In questo è data $a=34$, $\sqrt{b}=2\sqrt{-35}$ Adunque $a^2-b=1296$, e quindi $\sqrt{(a^2-b)}=36$. Sostituiti questi valori numerici nella formola (A), ottengo;

$$\sqrt{(34+2\sqrt{-35})}=\sqrt{(35)}+\sqrt{(-1)}$$

Sia per un secondo esempio il binomio $17+2\sqrt{70}$. Sarà in questo caso $a=17$, $b=280$. Onde $a^2-b=9$, $\sqrt{(a^2-b)}=3$. Adunque la radice quadrata del proposto binomio sarà; $\sqrt{10}$, $+\sqrt{7}$.

101. La risoluzione delle equazioni di secondo *grado* si estenda a tutte quelle della forma $x^{2n}+Ax^n+B=0$, le quali si chiamano perciò *derivative del secondo grado*. Presa infatti $y=x^n$, la *proposta* diviene

$$y^2+Ay+B=0$$

E quindi $y=-\frac{A}{2}\pm\sqrt{(\frac{A^2}{4}-B)}$

Rimettendo x invece di y, e dipoi estraendo la *rasima radice* n, sarà $x=\sqrt[n]{(-\frac{A}{2}\pm\sqrt{(\frac{A^2}{4}-B)})}$

Allorchè il numero n è pari converrà anteporre al primo segno radicale il doppio $\pm$, perchè una potenza pari n egualmente si compone dal prodotto di n quantità *positive*, che dallo stesso numero di quantità *negative*. Adunque in questo caso i valori della x saranno quattro, cioè;

$$x=\sqrt[n]{\left(-\frac{A}{2}+\sqrt{\left(\frac{A}{4}-B\right)}\right)},\ x=-\sqrt[n]{\left(-\frac{A}{2}+\sqrt{\left(\frac{A}{4}-B\right)}\right)}$$

$$x=\sqrt[n]{\left(-\frac{A}{2}-\sqrt{\left(\frac{A}{4}-B\right)}\right)},\ x=-\sqrt[n]{\left(\frac{A}{2}-\sqrt{\left(\frac{A}{4}-B\right)}\right)}$$

Ma quando il numero n sia dispari la potenza ha lo stesso segno della sua *radice*, e viceversa; onde in questo caso due sono i valori della x esposti dal doppio segno $\pm$ nella formola di sopra

$$x=\sqrt[n]{\left(-\frac{A}{2}\pm\left(\sqrt{\frac{A}{4}}-B\right)\right)}$$

Se qui terminasse la risoluzione della *proposta* $x^{2n}+Ax^{n}+B=0$ non sarebbe invero completa; perciocchè qualunque sia n, i valori dell' incognita x sarebbero due, o al più quattro, mentre debbono essere $2n$ (99). Per trovare i valori mancanti conviene ricorrere ad un teorema già dimostrato (57), cioè che; *Supposta* $\alpha^{n}=1$, *il binomio* $x^{n}-1$ *ha un numero* n *di fattori, di primo grado espressi in questa forma*; $(x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^{2})(x-\alpha^{3})\ldots(x-\alpha^{n-1})$

Siegue da questo teorema, che se dall' equazione $x^{n}-1=0$ si ricavi una *radice* α diversa da 1, le altre *radici* sono α^{2}, $\alpha^{3}\ldots\alpha^{n-1}$. Ed essendo l'equazio-

ne $x^n - 1 = 0$ priva di tutti i termini intermedj Ax^{n-1}, Bx^{n-2} ec. è chiaro che la somma delle radici $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 \ldots + \alpha^{n-1}$ è *zero*; che parimente sono *zero* tutti i loro prodotti a due a due, a tre a trè ec. e che il prodotto di tutte $1 . \alpha . \alpha^2 . \alpha^3 \ldots \alpha^{n-1} = 1$. Un altra proprietà rimarcabile hanno pure queste *radici*, ed è che allora quando col moltiplicarle fra loro l' esponente di α supera n, vengono a formarsi nuovamente le *radici* medesime. Per esempio $\alpha^{n+1} = \alpha$, perchè $\alpha^{n+1} = \alpha^n \times \alpha$, ed $\alpha^n = 1$. Collo stesso discorso si vede che $\alpha^{n+2} = \alpha^2$, $\alpha^{n+3} = \alpha^3$, come ancora che $\alpha^{2n} = \alpha^n \times \alpha^n = 1$, $\alpha^{3n} = 1$, $\alpha^{4n} = 1 \ldots \alpha^{mn} = 1$.

Pertanto se nell' equazione di sopra $x^n = -\frac{A}{2} \mp \sqrt{(\frac{A^2}{4} - B)}$ si faccia per brevità il secondo membro eguale a b^n, ed $x^n = by^n$, ella si cangerà in $b^n y^n - b^n = 0$, e dividendo per b^n, diverrà $y^n - 1 = 0$. I fattori di questa equazione a due termini, a norma di ciò che si è spiegato, sono $y - 1$, $y - \alpha$, $y - \alpha^2 \ldots y - \alpha^{n-1}$ e sostituendo ad y^n il suo valore $\frac{x^n}{b^n}$, avremo $x^n - b^n = 0 = (x - b)(x - b\alpha)(x - b\alpha^2) \ldots (x - b\alpha^{n-1})$, Dunque i valori della incognita x sono b, $b\alpha$, $b\alpha^2 \ldots b\alpha^{n-1}$

il numero dei quali è $2n$ a motivo del doppio valore di $b=\sqrt[n]{\left(\frac{-A}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{A^2}{4}-B.\right)}\right)}$

Rimane tuttavia indeterminato il valore di α, che dipende dall'equazione $\alpha^n-1=0$, e questa non può qui risolversi al di là dell'esponente $n=4$. Pur non ostante ad oggetto di vedere qualche applicazione di queste equazioni *derivative*, risolverò le equazioni $\alpha^2-1=0$, $\alpha^3-1=0$, $\alpha^4-1=0$. La prima ha evidentemente i due fattori $(\alpha+1)(\alpha-1)=0$; onde $\alpha=-1$, $\alpha=1$. La seconda divisa per $\alpha-1$ dà il quoto $\alpha^2+\alpha+1=0$.

Da questa si deduce $\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$; dunque i tre valori di α nell'equazione $\alpha^3-1=0$ sono $1, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, i quali si chiamano le *tre radici cubiche* dell'unità. Se facciamo $\alpha=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, si trova $\alpha^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; e viceversa facendo $\alpha=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ avremo $\alpha^2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Elevando al cubo qualunque delle tre *radici cubiche* si troverà sempre il resultamento 1, come dee essere. Finalmente l'equazione $\alpha^4-1=0$ si risolva nei fattori di secondo *grado* $(\alpha^2+1)(\alpha^2-1)=0$. Da questi risulta che i valori di α sono 1, $+\sqrt{-1}$, -1, $-\sqrt{-1}$. Vedesi da questi esempj un fatto assai singolare, cioè che

l'unità ha due *radici* seconde tre *cubiche*, quattro *quarte*, ed in generale *n radici n simme*. Veniamo adesso alla risoluzione di due problemi dipendenti da questa teorica.

Problema I. *Il prodotto di due numeri è* 16, *la somma dei loro cubi è* 520. *Quali sono questi numeri?*

Sia x l' uno di questi numeri, l' altro sarà $\frac{16}{x}$, e perciò $x^3+\left(\frac{16}{x}\right)^3=520$, ovvero $x^6-520x^3+4096=0$.

Da questa col metodo di risoluzione del secondo *grado* si deduce; $x^3=260\pm\sqrt{(63504)}=360\pm252$. Estraendo la radice cuba dai due valori di x, dipoi moltiplicando ognuna di queste per le *tre cubiche* dell' unità, avremo sei valori della x, cioè.

$$x=\sqrt[3]{512}=8 \qquad x=\sqrt[3]{8}=2$$
$$x=4(-1+\sqrt{-3}) \qquad x=-1-\sqrt{-3}$$
$$x=4(-1-\sqrt{-3} \qquad x=-1+\sqrt{-3}$$

I due numeri 8, 2 sodisfanno evidentemente al problema, e lo risolvono pure i due $4(-1+\sqrt{-3})$, $-1-\sqrt{-3}$, e gli altri due $4(-1-\sqrt{-3})$, $-1+\sqrt{-3}$

Problema II. *La somma delle quarte potenze di due numeri è* 706, *il triplo del prodotto di queste è* 151875. *Quali sono questi numeri?*

Sia x^4 la quarta *potenza* di uno dei numeri, sarà $\frac{151875}{3x^4}$, ovvero $\frac{50625}{x^4}$ la quarta *potenza* dell' altro numero. Avremo perciò l' equazione $x^4+\frac{50625}{x^4}=706$, la quale *ordinata* diventa

$$x^8-706x^4+50625=0$$

Risoluta questa col metodo del secondo *grado* dà due valori di x^4, cioè; $x^4 = 625$, $x^4 = 81$

Estraendo da questi due volte la radice quadra, troveremo la prima volta $x = \pm 25$ $x = \pm 9$, e con la seconda estrazione gli otto valori della x, cioè

$$x = 5 \qquad x = 3$$
$$x = -5 \qquad x = -3$$
$$x = 5\sqrt{-1} \qquad x = 3\sqrt{-1}$$
$$x = -5\sqrt{-1} \qquad x = -3\sqrt{-1}$$

E' visibile che avremmo avuto gli stessi risultamenti se ciascuno dei primi due valori 5, 3 si fosse moltiplicato per le quattro *radici quarte* dell'unità $1, \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}$. Tanto i quattro valori *positivi* della x, quanto i quattro *negativi* risolvono egualmente il *problema*.

102. Si è veduto in principio che la sostituzione di $y - \frac{A}{2}$ invece di x nella *proposta* di secondo *grado* ne toglieva il secondo termine. Questo resultamento si estende alle equazioni di tutti i *gradi* cambiando il denominatore 2 nel numero m esprimente il grado. Considerata infatti qualunque equazione come un prodotto di m fattori (99), cioè

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+t) = 0,$$

e sostituito $y - \frac{A}{m}$ in luogo di x, questo prodotto si cangia nel seguente

$$(y+a-\frac{A}{m})(y+b-\frac{A}{m})(y+c-\frac{A}{m})\ldots(y+t-\frac{A}{m}) = 0$$

Eseguita questa moltiplica, e chiamando A', B', C'. . . . T' i successivi coefficienti dell'equazione risultante, avremo;

$$y^m + A'y^{m-1} + B'y^{m-2} + C'y^{m-3} \ldots\ldots + T' = 0$$

Ora è visibile che essendo A' la somma di tutte le m *radici* $a - \frac{A}{m}$, $b - \frac{A}{m}$ ec. dee risultare $A' = \Sigma a - A = 0$

Dunque il secondo termine $A'y^{m-1}$ svanisce, e l' equazione rimane $y^m + By^{m-2} + C'y^{m-3} \ldots + T = 0$ Per altre non può qui insegnarsi il metodo di calcolare per mezzo dell' equazione data di qualunque grado m i coefficienti B', C' .... T'; ma perche é molto utile togliere il secondo termine dalle equazioni di terzo, e di quarto grado, che sono per trattare, mostrerò il modo da tenersi in queste, che in seguito potrà estendersi a tutte le altre Sia pertanto l' equazione *completa* di terzo grado

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

da cui vogliasi togliere il secondo termine Ax^2. Supposto $x = y - \frac{A}{3}$ ottengo

$$x^3 + C = y^3 - Ay^2 + \frac{A^2}{3}y - \frac{A^3}{27} + C$$

$$Ax^2 = Ay^2 - \frac{2A^2}{3}y + \frac{A^3}{9}$$

$$Bx = By - \frac{AB}{3}$$

E sommando sarà $0 = y^3 + (B - \frac{A^2}{3})y + C - \frac{A}{3}(B - \frac{2A^2}{9})$

Per togliere il secondo termine dall' equazione *completa* di quarto grado $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ si faccia $x = y - \frac{A}{4}$, ed avremo;

$$x^4 + D = \left(y - \frac{A}{4}\right)^2 \left(y - \frac{A}{4}\right)^2 + D$$

$$Ax^3 = A\left(y - \frac{A}{4}\right)^3$$

$$Bx^2 = B\left(y - \frac{A}{4}\right)^2$$

$$Cx = Cy - \frac{AC}{4}$$

Calcolando le *potenze* e moltipliche accennate, e dipoi sommando si troverà; $y^4 + \left(B - \frac{3A^2}{8}\right) y^2 + \left(C - \frac{A}{2}\left(B - \frac{A^2}{4}\right)\right) y + D - \frac{A}{4}\left(C - \frac{AB}{4} + \frac{3A^3}{64}\right) = 0$

103. Passiamo adesso a risolvere l'equazione di terzo grado priva del secondo termine, cioè;

$$x^3 + Ax + B = 0$$

Se facciamo $Ax + B = -(a+b)^3$, ed 1, α, α^2 le tre *radici cubiche* dell'unità, *la proposta* diventa $x^3 - (a+b)^3 = 0$, ed i tre valori della x saranno $x' = a+b$, $x'' = \alpha(a+b)$, $x''' = \alpha^2(a+b)$.

Ripiglio adesso l'equazione ipotetica $Ax + B = -(a+b)^3$, e riflettendo che B ha tre dimenzioni, A ne ha due, e che un valore di x è $a+b$, ne deduco (53); $B = -a^3 - b^3$, $A = -3ab$

Dalla seconda di queste ottengo $-b^3 = \frac{A^3}{27a^3}$, $-a^3 = \frac{A^3}{27b^3}$

Sostituiti questi valori nella prima per ridurla ad una sola incognita, e dipoi *ordinando*, ottengo;

$$a^6 + Ba^3 - \frac{A^3}{27} = 0$$

$$b^6 + Bb^3 - \frac{A^3}{27} = 0$$

Equazioni *derivative* del secondo grado, che diconsi le *trasformate* del terzo, e che danno i primi resultamenti identici

$$a^3 = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^3}{27} + \frac{B^2}{4}\right)} \quad b^3 = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^3}{27} + \frac{B^2}{4}\right)}$$

Il che significa che se per la quantità a si prenda il radicale col segno $+$, si dee prendere per la b col segno $-$.

Adunque le sei radici della *trasformata* sono;

$$a = \sqrt[3]{\left(-\frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{A^3}{27} + \frac{B^2}{4}\right)}\right)} \quad b = \sqrt[3]{\left(-\frac{B}{2} - \sqrt{\frac{A^3}{3} + \frac{B^2}{4}}\right)}$$

$$\alpha a \qquad \alpha b$$

$$\alpha^2 a \qquad \alpha b$$

Sono state così disposte le *radici cubiche* dell' unità perchè la *trasformata* nasce dall' ipotesi di $B = -a^3 - b^3$, e di $A^3 = -3ab$. Il valore di B sempre risulterebbe $-a^3 - b^3$ comunque si disponessero in a, ed in b queste *radici*; ma per ottenere il valore di A conviene adottare quest' unica disposizione, in cui

$$x^4 + D = \left(y - \frac{A}{4}\right)^2 \left(y - \frac{A}{4}\right)^2 + D$$

$$Ax^3 = A\left(y - \frac{A}{4}\right)^3$$

$$Bx^2 = B\left(y - \frac{A}{4}\right)^2$$

$$Cx = Cy - \frac{AC}{4}$$

Calcolando le *potenze* e moltipliche accennate, e dipoi sommando si troverà; $y^4 + \left(B - \frac{3A^2}{8}\right) y^2 + \left(C - \frac{A}{2}\left(B - \frac{A^2}{4}\right)\right) y + D - A\left(\frac{C}{4} - \frac{AB}{4} + \frac{3A^3}{64}\right) = 0$

103. Passiamo adesso a risolvere l'equazione di terzo grado priva del secondo termine, cioè;

$$x^3 + Ax + B = 0$$

Se facciamo $Ax + B = -(a+b)^3$, ed 1, α, α^2 le tre *radici cubiche* dell'unità, *la proposta* diventa $x^3 - (a+b)^3 = 0$, ed i tre valori della x saranno $x' = a+b$, $x'' = \alpha(a+b)$, $x''' = \alpha^2(a+b)$.

Ripiglio adesso l'equazione ipotetica $Ax + B = -(a+b)^3$, e riflettendo che B ha tre dimenzioni, A ne ha due, e che un valore di x è $a+b$, ne deduco (53); $B = -a^3 - b^3$, $A = -3ab$

$$x=\sqrt[3]{\left(-\frac{B}{2}+\sqrt{\left(\frac{A^3}{27}+\frac{B^2}{4}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\frac{B}{2}-\sqrt{\left(\frac{A^3}{27}+\frac{B^2}{4}\right)}\right)}$$

$$x=\sqrt[3]{\left(-\frac{B}{2}+\sqrt{\left(\frac{A^3}{27}+\frac{B^2}{4}\right)}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

$$+\sqrt[3]{\left(-\frac{B}{2}-\sqrt{\left(\frac{A^3}{27}+\frac{B^2}{4}\right)}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

$$x=\sqrt[3]{\left(-\frac{B}{2}+\sqrt{\left(\frac{A^3}{27}+\frac{B^2}{2}\right)}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{4}\right)}$$

$$+\sqrt[3]{\left(-\frac{B}{2}-\sqrt{\left(\frac{A^3}{27}+\frac{B^2}{4}\right)}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

Il primo di questi è il solo che sembri *reale*, gli altridue includono quantità *immaginarie*, e sembrano perciò dovere essere sempre *immaginari*. Che se il coefficiente A sia *negativo*, e sia inoltre $-\frac{A^3}{27}>\frac{B^2}{4}$, anche il primo dei valori di x comparisce *immaginario*, perciocchè il quadrato $\frac{B^2}{4}$ è sempre *positivo*, qualunque sia nella *proposta* il segno del coefficiente B.

Si può giungere a questi medesimi risultamenti con un raziocinio analogo a quello precedente nella risoluzione data in ultimo luogo per le equazioni di secondo *grado*. Considero primieramente che la *proposta* $x^3+Ax+B=0$ priva del secondo termine dà la somma delle sue *radici* $x'+x''+x'''=0$, e che la sua *trasformata* dovendo essere risolubile

il prodotto dei coefficienti di a, e di b è 1.

Si pongano questi sei radici della *trasformata* in ciascuno dei tre valori dell' incognita x, ed avremo nove valori così disposti;

$$x'=a+b \qquad x'=\alpha a+\alpha b \qquad x'=\alpha^2 a+\alpha^2 b$$

$$x''=\alpha a+\alpha^2 b \qquad x''=\alpha^2 a+b \qquad x''=a+\alpha b$$

$$x'''=\alpha^2 a+\alpha b \qquad x'''=a+\alpha^2 b \qquad x'''=\alpha a+b$$

Per altro i tre valori della prima colonna sono i soli che sodisfanno alla *proposta*, come è facile assicurarsene formando il prodotto $(x-a-b)$ $(x-\alpha a-\alpha^2 b)(x-\alpha^2 a-\alpha b)=0$. Moltiplicando nella stessa guisa gli altri tre valori disposti nella seconda colonna si ottiene $x^3+A\alpha^2 x+B=0$, ed il prodotto di quelli della 3a. colonna è $x^3+A\alpha x+B=0$. Adunque, poichè con questi tre sistemi di *radici* l' equazione di terzo grado risulta la stessa fuorichè nel coefficiente del secondo termine, è manifesto che la stessa *trasformata* risolve la *proposta* nei tre casi di Ax, $A\alpha x$, $A\alpha^2 x$, come ancora l' equazione di *nono grado* risultante dal prodotto (x^3+Ax+B) $(x^3+A\alpha x+B)(x^3+A\alpha^2 x+B)=0$, cioè;

$$x^9+3Bx^6+3(B^2+A^3)x^3+B^3=0$$

Ridotte in numeri le quantità α, α^2, i tre valori della x nel primo sistema che sodisfa alla *proposta*, sono;

$$x=\sqrt[3]{\left(-\frac{B}{2}+\sqrt{\left(\frac{A^3}{27}+\frac{B^2}{4}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\frac{B}{2}-\sqrt{\left(\frac{A^3}{27}+\frac{B^2}{4}\right)}\right)}$$

$$x=\sqrt[3]{\left(-\frac{B}{2}+\sqrt{\left(\frac{A^3}{27}+\frac{B^2}{4}\right)}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

$$+\sqrt[3]{\left(-\frac{B}{2}-\sqrt{\left(\frac{A^3}{27}+\frac{B^2}{4}\right)}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

$$x=\sqrt[3]{\left(-\frac{B}{2}+\sqrt{\left(\frac{A^3}{27}+\frac{B^2}{2}\right)}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{4}\right)}$$

$$+\sqrt[3]{\left(-\frac{B}{2}-\sqrt{\left(\frac{A^3}{27}+\frac{B^2}{4}\right)}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

Il primo di questi è il solo che sembri *reale*, gli altridue includono quantità *immaginarie*, e sembrano perciò dovere essere sempre *immaginari*. Che se il coefficiente A sia *negativo*, e sia inoltre $-\frac{A^3}{27}>\frac{B^2}{4}$, anche il primo dei valori di x comparisce *immaginario*, perciocchè il quadrato $\frac{B^2}{4}$ è sempre *positivo*, qualunque sia nella *proposta* il segno del coefficiente B.

Si può giungere a questi medesimi risultamenti con un raziocinio analogo a quello precedente nella risoluzione data in ultimo luogo per le equazioni di secondo *grado*. Considero primieramente che la *proposta* $x^3+Ax+B=0$ priva del secondo termine dà la somma delle sue *radici* $x'+x''+x'''=0$, e che la sua *trasformata* dovendo essere risolubile

colle regole finqui insegnate non può oltrepassare il secondo grado. Suppongo dunque essere questa trasformata $t^{2n} + A't^{n} + B' = 0$, in cui i coefficienti A', B' sieno quantità *razionali*, *ed intiere*, ed inoltre *funzioni* dei coefficienti A, B della proposta

Non può essere $n=1$, perchè in questo caso A' sarebbe di una *dimensione* e perciò impossibile a formarsi col coefficiente A di due *dimensioni*, e coll' altro B, che ne ha tre (59) Non può ancora essere $n=2$, perchè allora A' avrebbe due *dimensioni*, e B' quattro; onde il coefficiente B che ne ha tre non potrebbe essere compreso in alcuna delle *funzioni*, che debbono comporre A', B'. Può bensì essere $n=3$, poichè così A' ha tre *dimensioni*, B' sei, e quindi sì l' uno che l'altro coefficiente possono comporsi colle dimenzioni di A, e di B Pertanto la *trasformata* più semplice per le equazioni di terzo *grado* sarà: $t^{6} + A't^{3} + B' = 0$

Chiamando t', t'' due delle sei *radici* di questa, la considero il prodotto dei fattori $(t^{3} - t'^{3})(t^{3} - t''^{3}) = 0$ e quindi le altre quattro *radici* saranno (101) $\alpha t'$, $\alpha^{2} t'$, $\alpha t''$, $\alpha^{2} t''$. Ora poichè le tre *radici* x debbono essere *funzioni* delle sei *radici* t, e viceversa, fa d' uopo che ognuna delle prime eguagli due delle seconde, in modo però che la somma delle x sia *zero*, e che ciascuna di esse abbia un valore diverso, e independente l' uno dall'altro; altrimenti le *radici* avrebbero frà di loro un rapporto costante, che non si dee generalmente supporre nella *proposta* $x^{3} + Ax + B = 0$. Si possono adunque disporre

tre diversi sistemi di combinazione delle *radici* t per formare le x secondo l'esposte condizioni, cioè;

$$x'=t'+t'' \qquad x'=\alpha t'+\alpha t'' \qquad x'=\alpha^2 t'+\alpha^2 t''.$$

$$x''=\alpha t'+\alpha^2 t'' \quad x''=\alpha^2 t'+t'' \qquad x''=t'+\alpha t''.$$

$$x'''=\alpha^2 t'+\alpha t'' \quad x'''=t+\alpha^2 t'' \qquad x'''=\alpha t'+t''$$

Colla moltiplica, e colle qualità note dei coefficienti 1, α, α^2 si trova in ciascuno di questi sistemi $A=\Sigma x'x''=-3t't''$, $B=-x'x''x'''=-t'^3-t''^3$; e di qui la *trasformata*,

$$(t^3-t'^3)(t^3-t''^3)=t^6+Bt^3-\frac{A^3}{27}=0$$

Da questa si possono evidentemente dedurre le stesse riflessioni fatte di sopra, e gli stessi valori delle radici x, che sarebbe inutile ripetere.

104. Per discernere quando alcuna delle radici x sia *reale*, o *immaginaria*, e per determinarla esattamente, conviene estrarre la radice cuba dai radicali, che formano il primo x, poichè dato questo non vi è difficoltà per calcolare gli altri due. Questa estrazione di radice offre quattro casi differenti da contemplarsi separatamente, cioè;

1°. Quando la quantità $-\frac{B}{2}\pm\sqrt{(\frac{A^3}{27}+\frac{B^2}{4})}$ é un cubo perfetto, qualunque sia la combinazione dei segni di A, e di B nella *proposta*, e la loro respettiva grandezza

2°. Quando la stessa quantità colle stesse variabilità non è cubo perfetto

3°. Quando il radicale $\sqrt{(\frac{A^3}{27} + \frac{B^2}{4})}$ è *zero*.

4°. Quando questo radicale eguaglia, o differisce pochissimo da $\frac{B}{2}$

I coefficienti A, B si suppongono quantità *razionali*, *ed intiere*, poiche qualora non fossero tali, vi è il metodo di liberare qualunque equazione dai radicali, e dalle frazioni, come spiegheremo a suo luogo. Posto ciò per maggiore semplicità farò $P = \frac{B}{2}$ astraendo dal segno di B, e $\sqrt{(\frac{A^3}{27} + \frac{B^2}{4})} = \sqrt{\mp Q}$ per esprimere i due casi, in cui la quantità sotto il segno radicale sia *positiva*, *o negativa*. Avrò così la prima radice della *Proposta* sotto la *formola* generale;

$$x = \sqrt[3]{(P + \sqrt{\pm Q})} + \sqrt[3]{(P - \sqrt{\pm Q})}$$

Le radici cubiche enunciate in questa *formola* non possono avere altra forma, che la seguente;

$$p + \sqrt{\pm q} \quad , \quad p - \sqrt{\pm q} \; .$$

Imperciocchè elevando al cubo questi binomj si ottiene;

$$p^3 \mp 3pq + (3p^2 \pm q) \sqrt{\mp q}$$

$$p^3 \pm 3pq - (3p^2 \mp q) \sqrt{\pm q}$$

Ma questi risultamenti contengono come la formola una parte *razionale* $p^3 \pm 3pq$, che può eguagliarsi a P, ed una parte *irrazionale*, o *immaginaria* $(3p^2 \mp q) \sqrt{\mp q}$, che può eguagliarsi a $\sqrt{\pm Q}$. Laonde considerando già estratte queste radici cubiche

o esatte, o approssimate (82), avremo generalmente;

$$x = p + \sqrt{\pm q} + p - \sqrt{\mp q} = 2p$$

$$x = (\sqrt{p} + \sqrt{\pm q})\alpha + (p - \sqrt{\pm q})\alpha^2 = -p - \sqrt{\mp 3q}$$

$$x = (\sqrt{p} + \sqrt{\mp q})\alpha^2 + (p - \sqrt{\pm q})\alpha = -p + \sqrt{\mp 3q}$$

Dalla semplice ispezione di queste nuove *formole* delle radici risulta: *Che qualunque equazione di terzo grado ha almeno una radice reale* $2p$ *eguale alla somma delle altre due col segno contrario, conforme deve essere, acciò manchi il secondo termine nella proposta. Che le altre due radici sono immaginarie quando* Q *(vale a dire* $\frac{A^3}{27} + \frac{B^2}{4}$*) è quantità positiva; sono reali quando* Q *è negativa* Che infine quando Q *è zero, le tre radici sono tutte reali, due sono fra loro eguali, e ciascuna di queste è la metà della prima col segno contrario.*

Vediamo adesso come si possano determinare nel fatto le quantità p, q in modo da sodisfare alle *equazioni di condizione* $p^3 \pm 3pq = P$, $(3p^2 \pm q)\sqrt{\pm q} = \sqrt{\pm Q}$

Alzandole ameudue al quadrato, e rammentandosi che $P = \pm \frac{B}{2}$, e $\pm Q = \frac{B^2}{4} \pm \frac{A^3}{27}$ nel doppio caso che questa quantità sia *positiva*, o *negativa*, si ottiene;

$$p^6 \pm 6p^4 q + 9p^2 q^2 = \frac{B^2}{4}$$

$$\pm 9p^4 q + 6p^2 q^2 \pm q^3 = \frac{B^2}{4} \pm \frac{A^3}{27}$$

Sottraendo resta $p^6 \mp 3p^4 q + 3p^2 q^2 \mp q^3 = \mp \frac{A^3}{27}$

Ed estratta la radice cuba da questa equazione residua ottengo; $p^2 \mp q = \mp \frac{A}{3}$

Preso di qui il valore di $\pm q = p^2 \pm \frac{A}{3}$, e sostituito nella prima delle equazioni di condizione $p \pm 3pq = \pm \frac{B}{2}$ ottengo; $4p^3 \pm Ap = \pm \frac{B}{2}$

Facendo in questa, $2p = x$, come dee essere, ed ordinando, ritorna appunto la proposta nel doppio caso dei coefficienti A, B *positivi*, o *negativi*, cioè;

$$x^3 \pm Ax \mp B = 0$$

Ve lesi da quest' ultimo resultamento che per determinare le quantità p, q col solito metodo della eliminazione di una di esse si incontra la stessa difficoltà che per risolvere la proposta, e sembrano perciò *indeterminabili* Ma da altra parte resta così dimostrato che le premesse *equazioni di condizione sono esattamente vere*, perchè appunto riconducono con precisione a formare la *proposta*. Converrà adunque trattare in diverso modo il problema che occorre per trovare il valore di p, q; ed ecco il metodo da tenersi per la sua risoluzione.

Ripiglio le equazioni $p^3 \pm 3pq = \pm \frac{B}{2}$, $p^2 \mp q = \mp \frac{A}{3}$, dalle quali è facile dedurre $2p = \sqrt{(\pm \frac{B}{2p} \mp A)}$

$$\mp 3q = \frac{1}{4}\left(\mp \frac{3B}{2p} \mp A\right)$$

Ora se fra i *submultipli* di B presi in +, e in — se ne trovano alcuni che sodisfacciano alla prima delle precedenti equazioni resterà ancora determinata la seconda, ed avremo così i ricercati valori di $p+\sqrt{\pm q}$, $p-\sqrt{\pm q}$, e da questi le tre *radici* della *proposta* che possono porsi sotto le formole seguenti alquanto diverse da quelle di sopra;

$$x = 2p$$

$$x = -p - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\mp \frac{3B}{2p} \mp A\right)}$$

$$x = -p + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\mp \frac{3B}{2p} \mp A\right)}$$

Con tali formole si risolvono speditamente tutte le equazioni di terzo grado comprese nel primo dei quattro casi di sopra proposti a contemplarsi, cioè *Quando la quantità* $P \pm \sqrt{\pm Q}$ *è un cubo perfetto*, ed è in conseguenza razionale almeno la prima *radice* $x = 2p$, la quale si determina in virtù dell' equazione $2p = \sqrt{\left(\pm \frac{B}{2p} \mp A\right)}$. Veniamo agli esempj.

Sia proposta a risolversi l'equazione $x^3 - 7x + 6 = 0$ in cui $2p = \sqrt{7 - \frac{6}{2p}}$. I *submultipli primi* del 6 sono 1, 2, 3 Prendo $2p = 1$, ed ho $2p = \sqrt{(7-6)} = 1$. Dunque le radici della *proposta* sono $x = 1$, $x = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(18+7)}) = -3$; $x = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{(18+7)}) = 2$

Se avessi preso $2p = 2$ avrei ottenuto collo stesso calcolo $x = 2$, $x = -3$, $x = 1$: come ancora prendendo $2p = -3$, avrei similmente ottenuto $x = -3$ $x = 1$, $x = 2$

Sia inoltre *proposta* $x^3 - 6x - 40 = 0$; in cui

$2p = \sqrt{\left(\frac{40}{2p} + 6\right)}$. Preso $2p = 4$ *submultipla* di 40, avremo $2p = \sqrt{10 + 6} = 4$. Adunque le tre radici della proposta sono $x = 4$. $x = 2 \pm \sqrt{-6}$

105. Quando niuno dei *submultipli* di B sodisfà all'equazione $2p = \sqrt{\left(\frac{\pm B \mp 1}{2p}\right)}$ è manifesto la quantità $P \pm \sqrt{\pm Q}$ non è *cubo perfetto*, perciocchè non si può determinare *razionalmente* la prima *radice* $x = 2p$. In questo caso, che è il secondo da prendersi in esame, il metodo di risoluzione il più naturale à quello di estrarre per approssimazione la *radice cuba* della quantità $P \pm \sqrt{\pm Q}$ (75, e 80), Questa Operazione non offre alcuna difficoltà qualora Q sia *positivo;* soltanto convien badare di spingere l'approssimazione di $\sqrt{Q}$ fino a $3n$ decimali, o poco meno, secondo che si voglia estendere l'approssimazione di $\sqrt[3]{(P \pm \sqrt{Q})}$ fino ad n decimali. Per vederne un esempio sia proposta l'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$, dalla quale si deduce la prima radice $x = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2} + \sqrt{\left(\frac{25}{4} - \frac{8}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2} - \sqrt{\left(\frac{25}{4} - \frac{8}{27}\right)}\right)}$

Abbiamo $\frac{25}{4} - \frac{8}{27} = \frac{643}{108} = 5,9573073073 0$ ec, la di cui radice quadra approssimata fino a 16 decimali si trova essere 2, 4400212506664207.

Di qui deduco $x = \sqrt[3]{(4,9400212506664207)} + \sqrt[3]{(0,0599787493335793)}$ ed estratte le due *radici cubiche*, in cui l'ultimo decimale è di alcun poco maggiore del vero a meno di 1, ottengo;

$x = 1,70311095 + 0,39144052 = 2,2,09455147$

Le altre due radici sono in generale $x = -p \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3B}{2p} \mp A\right)}$ poichè abbiamo $-p = -1,04727573$, $B = -5$, $A = -2$, si troverà $\sqrt{\left(\frac{\mp 2B - A}{2p}\right)} = \sqrt{(-5,161438)} = \pm 2,272\sqrt{-1}$, e perciò queste *radici* sono $x = -1,04727573 \pm 1,136\sqrt{-1}$

106. Ma quando Q è *negativo* sembra a prima impossibile estrarre la *radice cuba* dal binomio $P \pm \sqrt{-Q}$ a motivo della quantità *immaginaria* $\sqrt{-Q}$. Questa difficoltà può forse essere stata la causa per cui questo caso si chiama *irriducibile*, sebbene comunemente si dimostri che la somma $\sqrt[3]{(P + \sqrt{-Q})} + \sqrt[3]{(P - \sqrt{-Q})}$ che forma la prima radice $x = \pm 2p$ è sempre quantità *reale*. Non è qui il luogo di insegnare a rigore questa dimostrazione, ma frattanto si può osservare che anche il metodo ordinario di estrarre la *radice cuba*, purchè usato con una certa industria, conduce alla medesima conclusione.

A tale effetto riduco il binomio $\sqrt{(P \pm \sqrt{-Q})}$ sotto la forma $P^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\left(1 \pm \frac{1}{P}\sqrt{-Q}\right)}$ e quindi fatto $\frac{1}{P}\sqrt{-Q} = c$, avrò $\sqrt[3]{(P \pm \sqrt{Q})} = P^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{(1 \pm c)}$ Considerando adesso nel binomio $1 + c$ i primi due termini di un cubo, di cui mancano tutti gli altri ne estraggo la *radice* (82). e proseguo l'operazione oltre i termini $1 + c$ sù gli avanzi successivi, che

continuamente rimangono dopo le necessarie sottrazioni Ottengo così la richiesta *radice* nella seguente *serie*, che può proseguirsi all' infinito;

$$\sqrt[3]{(1+c)}=1+\frac{c}{3}-\frac{c^2}{3^2}+\frac{5c^3}{3^4}-\frac{10c^4}{3^5}+\frac{22c^5}{3^6}-\frac{154c^6}{3^8}$$

$$+\frac{374c^7}{3^9}-\frac{935c^8}{3^{10}}+\text{ec.}$$

Variando $+c$ in $-c$ si deduce evidentemente;

$$\sqrt[3]{(1-c)}=1-\frac{c}{3}-\frac{c^2}{3^2}-\frac{5c^3}{3^4}-\frac{10c^4}{3^5}-\frac{22c^5}{3^6}-\frac{154c^6}{3^8}$$

$$\frac{374c^7}{3^9}-\frac{935c^8}{3^{10}}-\text{ec},$$

E la somma di queste due *serie* moltiplicata per $P^{\frac{1}{3}}$ darà $P^{\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{1+c}+\sqrt[3]{1-c})=2P^{\frac{1}{3}}(1-\frac{c^2}{}$

$$-\frac{10c^4}{3^5}-\frac{154c^6}{3^8}-\frac{935c^8}{3^{10}}-\text{ec.})$$

Sostituendo in questa ultima *serie* $\frac{1}{P}\sqrt{-Q}$ invece di c é facile vedere che le potenze pari di c delle quali è composta, daranno risultamenti tutti *reali*.

Abbiamo infatti $c^2=-\frac{Q}{P^2}$, $c^4=\frac{Q^2}{P^4}$, $c^6=-\frac{Q^3}{P^6}$, $c^8=\frac{Q^4}{P^8}$ ec.

Sarà adunque *reale* la prima radice x anche nel caso *irriduzibile*, ed il suo valore sarà;

$$\sqrt[3]{(P+\sqrt{-})Q}+\sqrt[3]{(P-\sqrt{-Q})}=2P^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{Q}{3^2P^2}-\frac{10Q^2}{3^5P^4}\right.$$

$$\left.+\frac{154Q^3}{3^8P^6}-\frac{936Q^4}{3^{10}P^8}+\text{ec.}\right)\ (A)$$

La serie (A) così formata ha il difetto di non presentare la legge con cui da ciascun termine deriva il susseguente; onde è che non appar sce il modo di proseguirla a piacimento senza ricorrere al calcolo della *radice cuba* tanto più complicato, quanti più sono i termini che si vogliono. Per discoprire questa legge, almeno coll' induzione, sciolgo nei loro fattori i *numeratori* 10, 22, 154, 374 935 della serie immediatamente ottenuta coll' estrazione della *radice cuba*, facendo cioè; 10 = 2. 5, 22 = 2. 11, 154 = 2. 7. 11, 374 = 2. 11. 17, 935 = 5. 11. 17. Osservo in seguito che la minima differenza fra questi fattori è quella fra il 2, ed il 5, cioè 3. Che se vogliasi conservare questa istessa differenza 3 fra i fattori degli altri *numeratori* converrà cangiare il secondo in 2. 5. 8. 11; il terzo può restare 11. 14; il quarto dovrà diventare 2. 5. 8 11. 14. 17, il quinto 5. 8. 11. 14. 17. Considerando adesso i *denominatori* corrispondenti si potranno essi pure sciogl ere nei loro *fattori* 3. 3. 3 ec; e perché le frazioni non sieno alterate converrà moltiplicare questi *denominatori* per quelli stessi numeri aggiunti nei *numeratori* affinchè i loro *fattori* procedano colla differenza costante di 3; badando inoltre di conservare con tali moltipliche la differenza medesima anche tra i *fattori* dei *denomina-*

sori. Importerà infine acciò piu chiara apparisca la ricercata legge, che tanti sieno i *fattori* in ciascun *numeratore* quanti nel suo *denominatore*. Dopo tutto cio non è difficile il comprendere che la serie di cui si tratta può essere trasformata come segue con legge evidente della derivazione di ciascun termine da quello che lo precede.

$$1+\frac{1\,c}{3}-\frac{1.2c^2}{3.6}+\frac{1.2.5c^3}{3.6.9}-\frac{1.2.5.8c^4}{3.6.9.12}+\frac{1.2.5.8.11c^5}{3.6.9.12.15.}$$

$$-\frac{1.2.5.8.11.14c^6}{3.6.9.12.15.18}+\frac{1.2.5.8.11.14.17c^7}{3.6.9.12.15.18.21}-\text{ec. (B)}$$

E poichè nella serie (A) spariscono le potenze dispari di c, e rimangono le pari, non sarà meno evidente il progresso dei suoi termini ordinandoli come segue a norma della serie (B)

$$2P^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1.2Q}{3.6P^2}-\frac{1.2.5.8\,Q^2}{3.6.9.12\,P^4}+\frac{1.2.5.8.11.14Q^3}{3.6.9.12.15.18.P^6}-\text{ec}\right)$$

Allorchè sarà $Q<P^2$ i termini di questa serie anderanno continuamente scemando con rapidità, e perciò con pochi termini della medesima si avrà una sufficiente approssimazione: ma se sia $Q>P^2$, i termini continuamente cresceranno con eguale rapidità, onde in questa ipotesi la serie istessa è affatto inutile al nostro scopo. Nel primo caso le serie in generale si chiamano *convergenti*, nel secondo *divergenti*. Pertanto a fine di rendere *convergente* la serie (C) quando sia $Q>P^2$ conviene tra-

sformarla in altra nella quale le frazioni $\frac{Q}{P^2}$, $\frac{Q^2}{P^4}$ ec. sieno inversamente $\frac{P^2}{Q}$, $\frac{P^4}{Q^2}$ ec. Si giunge a questo risultamento cambiando il binomio $1 \pm c$ in $\pm c + 1$, e riflettendo che $\sqrt[3]{(c+1)} = c^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{(1+\frac{1}{c})}$, $\sqrt[3]{(-c+1)} = -c^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{(1-\frac{1}{c})}$ E' infatti evidente che lo sviluppo dei binomj radicali così ridotti dee essere precisamente quello già trovato per $\sqrt[2]{(1 \pm c)}$ soltanto che si muti c in $\frac{1}{c}$ Adunque chiamando per brevità $m^{(1)}$, $m^{(2)}$, $m^{(3)}$ ec. Il primo, il secondo, il terzo ec. dei coefficienti numerici della serie (B) sarà;

$$c^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{(1+\frac{1}{c})} = c^{\frac{1}{3}} (1 + \frac{m^{(1)}}{c} - \frac{m^{(2)}}{c^2} + \frac{m^{(3)}}{c^3} - \frac{m^{(4)}}{c^4} + \frac{m^{(5)}}{c^5} - ec)$$

$$-c^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{(1-\frac{1}{c})} = c^{\frac{1}{3}} (-1 + \frac{m^{(1)}}{c} + \frac{m^{(2)}}{c^2} + \frac{m^{(3)}}{c^3} + \frac{m^{(4)}}{c^4} + \frac{m^{(5)}}{c^5} + ec$$

Sommando le due serie, e moltiplicando la somma per $P^{\frac{1}{3}}$ sarà;

$$P^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{(c+1)}+\sqrt[3]{(-c+1)}\right)=2P^{\frac{1}{3}}\,c^{\frac{1}{3}}\left(\frac{m^{(1)}}{c}+\frac{m^{(3)}}{c^{3}}\right.$$

$$\left.+\frac{m^{(5)}}{c^{5}}+\frac{m^{(7)}}{c^{7}}+\text{ec.}\right)$$

Nel secondo membro di questa equazione si tolga dalle frazioni il *denominatore e multiplo* comune di tutti i *denominatori*, e si ponga sotto $P^{\frac{1}{2}}\,c^{\frac{1}{3}}$. Essendo $\frac{c^{\frac{1}{3}}}{c}=\frac{1}{c^{\frac{2}{3}}}$, questo secondo membro diverrà;

$$2\,(P)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{m^{(1)}}{c^{2}}+\frac{m^{(3)}}{c^{2}}+\frac{m^{(5)}}{c^{4}}+\frac{m^{(7)}}{c^{6}}+\text{ec.}\right)$$

E sostituendo *invece* di c il suo valore $\frac{\sqrt{(-Q)}}{P}$ avremo infine la ricercata serie, cioè;

$$(D)\quad \sqrt[3]{(P+\sqrt{(-Q)}}+\sqrt[3]{(P-\sqrt{(-Q)}}=-\frac{2P}{Q^{\frac{1}{3}}}$$

$$\left(m^{(1)}-m^{(3)}\frac{P^{2}}{Q}+m^{(5)}\frac{P^{(4)}}{Q^{2}}-m^{(7)}\frac{P^{6}}{Q^{3}}+\text{ec.}\right.$$

Ottenuta per mezzo delle *serie* (C), (D) secondo l' opportunità la prima *radice* $x=\sqrt[3]{(P+\sqrt{Q})}$

$+\sqrt[3]{(P-\sqrt{(-Q)}}$ approssimata, ma pur sempre *reale*, che chiamerò $2p$, le altre due radici della *proposta* del terzo grado si avranno nel caso *irriducibile* colla formola già dimostrata $x=-\frac{1}{2}\sqrt{(\pm\frac{3B}{2p}+A)}$, il di cui valore sarà sempre *reale*. Sieno infatti a, b, c le tre radici della *proposta*; siccome essa manca del secondo termine dovrà essere $a+b-c=0$, e perciò $c=2p$, $\pm 3B=\pm 3ab$. E' chiaro altresì che $-A=ab-(a+b)^2$, ovvero $A=a^2+ab+b^2$ quantità evidente maggiore di $3ab=3B$, perchè altrimenti $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, sarebbe *negativo*, il che è assurdo. Dunque il radicale $\sqrt{(\pm\frac{3B}{2p}+A)}$ sarà sempre *reale*.

Applichiamo questa teorica a due equazioni in cui accade il caso *irriducibile*, e sia la prima;

$$x^3-7x+7=0$$

La sua prima radice è $x=\sqrt[3]{(-\frac{7}{2}+\sqrt{(-\frac{49}{108})}}$ $+\sqrt[3]{(\frac{7}{2}-\sqrt{(-\frac{49}{108})}}$, onde abbiamo qui $P=-\frac{7}{2}$, $Q=\frac{49}{108}$, $\frac{Q}{P^2}=\frac{1}{3^3}$, $2P^{\frac{1}{3}}=-3,0365888$. Sostituiti questi dati nella serie (C), avremo;

$$x=-3,0365888\left(1+\frac{1}{3^5}-\frac{10}{3^{11}}+\frac{154}{3^{17}}-\frac{935}{3^{22}}+\text{ec.}\right)$$

Calcolati i soli cinque termini segnati della serie si trova $1,0040599$; e di quì $x=-3,048917$.

prendendo i primi sette decimali del prodotto.

Per calcolare le altre due radici abbiamo $-p=1,524\,4585$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\underset{3,048ec.}{-21}+7)}=\pm 0,1675623$:

Onde $x=1,3568962$, $x=1,6920208$ 3

Sia in secondo luogo l'equazione; $x^3-6x-2=0$, di cui la prima radice è $x=\sqrt[3]{(1+\sqrt{-7})}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{-7})}$

Abbiamo qui $P=1$, $Q=7$, e perciò $Q>P^2$. Conviene adunque prendere la serie (D), dalla quale si deduce; $x=-\frac{2}{7^{\frac{1}{3}}}(m^{(1)}-\frac{m^{(3)}}{7}+\frac{m^{(5)}}{7^2}-\frac{m^{(7)}}{7^3}+\frac{m^{(9)}}{7^4}-\text{ec.})$.

Ma $\frac{2}{7^{\frac{1}{3}}}=1,0455461$, ed i cinque termini danno $0,32508109$; dunque $x=-0,3398775$ prendendo i primi sette decimali del prodotto. Abbiamo inoltre per le altre due radici, $-p=0,16993875$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\underset{0,3398ec.}{6}+6)}=\pm 2,43175$; e quindi $x=2,6016887$, $x=-2,2618112$.

107. Resta a trattarsi dell' ultimo fra i quattro casi proposti (104), cioè quando il radicale $\sqrt{(\frac{A^3}{27}+\frac{B^2}{4})}$ eguaglia, o differisce pochissimo da $\frac{B}{2}$. Se la quantità sotto il radicale è *positiva*, potremo usare del metodo esposto al N°. 105. senza alcuna innovazione, ma se fosse negativa, cioè $\sqrt{-Q}$, e fosse $P^2+d=Q$ (posta $d=0$, ovvero una piccola quan-

tità positiva, o negativa), i termini della serie (C), (D) convergerebbero piuttosto lentamente, e darebbero per conseguenza una tarda approssimazione. Per ovviare a tale difficoltà supponiamo in primo luogo $P^2 = Q$, d'onde risulterà evidentemente la prima radice $x = \sqrt[3]{(P + \sqrt{-P^2})} + \sqrt[3]{(P - \sqrt{-P^2})}$.

In questa abbiamo $P = \pm \frac{B}{2}$, $P^2 - \frac{A^3}{27} = -P^2$, e quindi 2P, ovvero $B = \frac{A}{3}\sqrt{(\frac{2A}{3})}$. Adunque nel caso di cui si tratta la *proposta* prende questa forma

$$x^3 - Ax + \frac{A}{3}\sqrt{\frac{2A}{3}} = 0$$

Ora è facile vedere che un valore dell'incognita è in questo caso $x = \sqrt{\frac{2A}{3}}$, perciocchè sostituito $\sqrt{\frac{2A}{3}}$ in luogo di x, l'equazione precedente diviene *zero*.

Dee pertanto conchiudersi che nel caso di $P^2 = Q$ non vi è alcun bisogno di servirsi delle serie (C) (D), ma conviene prendere la prima radice $x = \sqrt{\frac{2A}{3}}$ la quale chiamata $2p$ darà le altre due *radici* colla solita formola $x = -p \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\pm \frac{3B}{2p} + A)}$.

Sia per esempio l'equazione $x^3 - 6x - 4 = 0$, in cui $P = 2$, $\sqrt{-Q} = \sqrt{(4 - 8)}$, ed in conseguenza $P^2 = Q$. Avremo la prima radice $x = -\sqrt{\frac{2A}{3}} = -2$;

e di qui le altra due $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

Qualora poi abbiasi $P^2 + d = Q$, sarà $-(P^2 + d) = P^2 - \frac{A^3}{27}$, e quindi $B = \sqrt{(\frac{2A^3}{27} - d)}$. Adunque in questo caso la proposta prende la seguente forma;

$$x^3 - Ax + \sqrt{(\frac{2A^3}{27} - 2d)} = 0$$

Non potendosi qui trovare come di sopra un valore esatto della x, ed essendo d' altronde manifesto che applicandovi la serie (D), questa convergerebbe con lentezza, perchè la frazione $\frac{P^2}{Q} = \frac{P^2}{P^2 + d}$ eguaglia quasi l'*unità* allorchè d è quantità piccolissima, tentiamo di scoprire se la *proposta* così ridotta può trasformarsi in altra simile, che abbia per ultimo termine la piccola quantità $2d$. A tale effetto trasporto il radicale nel secondo membro, alzo l'equazione al quadrato, e dipoi ordinando ottengo

$$x^6 - 2Ax^4 + A^2x^2 - \frac{2A^3}{37} + 2d = 0$$

Dovendo questa cambiarsi in una equazione di terzo *grado* priva del secondo termine, conviene prendere una nuova incognita $y = x^2 - \frac{2A}{3}$, e sostituendo $y + \frac{2A}{3}$ in luogo di x^2, si avrà l'equazione cercata;

$$y^3 - \frac{A^2 y}{3} + 2d = 0$$

Applicando a questa la serie (D) ella sarà convergentissima, poichè abbiamo $P=-d$, $Q=\frac{A^6}{729}-d^2$, e perciò piccolissima la frazione $\frac{P^2}{Q}=\frac{d^2}{\frac{A^6}{729}-d^2}$. Trovato il valore della y per mezzo dalla serie (D), l' equazione $x=\sqrt{(y+\frac{2A}{3})}$ ci darà la prima *radice* della *Proposta*, e quindi col solito metodo si avranno le altre due *radici*.

Proponiamoci a risolvere per esempio di questo caso l' equazione

$$x^3-7x+5=0$$

Nella quale la prima radice $x=\sqrt{(-\frac{5}{2}+\sqrt{(\frac{25}{4}-\frac{343}{27})})}$ $+\sqrt{(-\frac{5}{2}-\sqrt{(\frac{25}{4}-\frac{343}{27})})}$ offre $d=\frac{343}{27}-\frac{25}{2}=\frac{11}{54}$

Quindi è che posto $x^2=y+\frac{14}{3}$, la trasformata $y^3-\frac{A^2}{2}y+2d=0$ diverrà $y^3-\frac{49y}{3}+\frac{11}{27}=0$. Applicando a questa trasformata la serie (D), avremo primieramente

$$P=-\frac{11}{54},\ Q=\frac{49^3}{729}-(\frac{11}{54})^2=\frac{470475}{2916},\ -2\frac{P}{Q^{\frac{1}{3}}}=0,0747892$$

$\frac{P^2}{Q}=\frac{121}{470475}$. Da questi dati si deduce con i primi soli due termini della serie (D), $y=0,02492819954$; e quindi $x=\sqrt{(y+\frac{14}{3})}=2,1660089$, che

è la prima radice della Proposta, da cui colla solita formola si calcoleranno le altre due.

108. Termineremo la teorica delle equazioni di terzo grado colla risoluzione di due problemi.

Problema 1. *Una colonia di* 200 *persone mandate ad abitare in una isola è cresciuta tanto dopo tre anni, che questo aumento unito a quello del primo anno ammonta a* 6000 *persone Si domanda quale è stato in ragguaglio l'aumento annuo.*

Sia $200x$ l'aumento del primo Anno, così chè al termine di questo la colonia sia divenuta $200 + 200x$ Per trovare l'aumento al termine del secondo anno, che chiamo a, si faccia la proporzione;

$$200 : 200 + 200x = 200 + 200x : a,$$

ovvero $1 : 1 + x = 200(1 + x) : a$

ed avremo $a = 200(1 + x)^2$. Nel modo istesso l'aumento al termine del terzo anno si trova essere $200(1 + x)^3$: e perciò fatto $1 + x = y$ avremo l'equazione $200y^3 + 200y = 6000$, ovvero

$$y^3 + y - 30 = 0$$

Tentiamo adesso di scoprire se la precedente equazione abbia almeno una radice *razionale* (104) per mezzo della nota formola $2p = \sqrt{(\mp A \pm B)}$. Siccome abbiamo qui $A = 1$, $B = -30$, sarà $2p = \sqrt{(-1 + 30)}$

I *submultipli primi* di 30 sono 1, 2, 3, 5, fra i quali preso $2p = 3$ si ottiene $2p = \sqrt{(1 + 30)} = 3$. Adunque i tre valori della y sono; $y = 3$, $y = -\frac{1}{2}$

$(3+\sqrt{(-31)})$, $y=-\frac{1}{2}(3-\sqrt{(-31)})$; ciascuno dei quali risolve egualmente il proposto problema.

Problema II. *Dividere il numero* 10 *in quattro parti continuamente proporzionali, di modo chè moltiplicando la prima per* 8, *la seconda per* 4, *la terza per* 3., *e la quarta per* 1. *la somma di tutti questi prodotti sia* 16

Sia x la prima delle parti richieste, ed y il quoto della proporzione avremo per le condizioni del problema;

$$x+xy+xy^2+xy^3=10$$

$$8x+4xy+3xy^2+xy^3=16$$

Da ciascuna di queste prendo il valore dell'incognita x, ed eguagliando i due valori ottengo

$$\frac{5}{y^3+y^2+y+1}=\frac{8}{8+4y+3y^2+y^3}$$

Riducendo allo stesso denominatore, ed *ordinando* avremo infine

$$y^3-\frac{7y^2}{3}-4y-\frac{32}{3}=0$$

Per risolvere questa equazione *completa*, conviene incominciare dal toglierle il secondo termine (102); e però fatto $y=z+\frac{7}{9}$

troveremo; $(9z)^3-471.9z-10730=0$

ovvero preso $u=9z$, sarà; $u^3-471u-10730=0$

Qualora u abbia un valore *razionale* $2p$, già sappiamo (104) che le radici di questa ultima equazione sono $u=2p=\sqrt{(-A-\frac{B}{2p})}$

$$u = -p - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3B}{2p} - A\right)}$$

$$u = -p + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3B}{2p} - A\right)}$$

Ed abbiamo qui $A = -471$, $B = -10730$. I *submultipli primi* di 10730 sono 2, 5, 29, 47, 1073; frà i quali preso il 29, sarà $2p = \sqrt{(471 + 370)} = 29$ Pertanto rammentandosi che $u = 9z = 9y - 7$, avremo

$$9y - 7 = 29$$

$$9y - 7 = -\frac{1}{2}(29 + 3\sqrt{+71})$$

$$9y - 7 = -\frac{1}{2}(29 - 3\sqrt{-71})$$

E quindi i tre valori dell' incognita;

$$y = 4$$

$$y = -\frac{1}{6}(5 + \sqrt{(-71)})$$

$$y = -\frac{1}{6}(5 - \sqrt{(-71)})$$

Sostituito ciascuno di questi valori nella equazione;

$$x + xy + xy^2 + xy^3 = 10$$

si avranno i tre valori di x, cioè $x = \frac{2}{17}$. $x = \frac{108}{35 \pm \sqrt{(-71)}}$

Perciò le quattro parti in proporzione continua, in cui dee dividersi il numero 10 possono essere prese nei tre seguenti modi;

$$\frac{1}{17}(2 + 8 + 32 + 128) = 10$$

$$\frac{1}{35 \mp \sqrt{71}}(108 - (90 \pm 18\sqrt{-71}) - (138 \mp 30\sqrt{-71}) + (470 \mp 2\sqrt{-71}) = 10$$

In ciascuno di questi modi trovasi verificata la seconda condizione del problema.

109 Passiamo alla risoluzione delle equazioni di quarto *grado* prive del secondo termine, e sia la *proposta*

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

Chiamo x', x'', x''', x'''' le sue quattro *radici*; la mancanza del secondo termine dà $x' + x'', + x''', + x'''' = 0$ (99). Considero inoltre che la *trasformata* atta alla soluzione della proposta non dee oltrepassare il terzo grado, e sarà perciò della forma seguente;

$$t^{3n} + A't^{2n} + B't^{n} + C' = 0$$

Le dimensioni dei coefficienti A, B, C sono 2, 3, 4; quelle di A', B', C' sono n, $2n$, $3n$. Fatto $n = 2$ è evidente che coi numeri 2, 3, 4 si potrà comporre la serie delle dimensioni 2, 4, 6; dunque la *trasformata* più semplice pel quarto *grado* sarà;

$$t^6 + A't^4 + B't^2 + C = 0 = (t^2 - t'^2)(t^2 - t''^2)(t^2 - t'''^2)$$

e le sue *radici* saranno $\pm t'$, $\pm t''$, $\pm t'''$; cioè tre positive diverse trà loro, e le stesse tre prese in senso *negativo*. Questa condizione essenziale combinata coll'altra della equazione $x' + x'' + x''' + x'''' = 0$, da cui deduco

$$x' + x'' = -x''' - x''''$$
$$x' + x''' = -x'' - x''''$$
$$x' + x'''' = -x'' - x'''$$

mi conduce naturalmente a supporre

$$t' = x' + x'' \qquad -t' = x''' + x''''$$
$$t'' = x' + x''' \qquad -t'' = x'' + x''''$$
$$t''' = x' + x'''' \qquad -t''' = x'' + x'''$$

E da queste infine ottengo senza difficoltà;

$$x' = \frac{t' + t'' + t'''}{2}, \quad x'' = \frac{t' - t'' - t'''}{2}, \quad x''' = \frac{t'' - t' - t'''}{2},$$
$$x'''' = \frac{t''' - t' - t''}{2}$$

Colla moltiplica dei valori ipotetici della t formo i coefficienti della *trasformata*, e trovo;

$$A' = -t'^2 - t''^2 - t'''^2 = \begin{array}{l}(x'x''' + x'x'''' + x''x''' + x''x'''')\\(x'x'' + x'x'''' + x''x''' + x''x'''')\\(x'x'' + x'x''' + x''x'''' + x'''x'''')\end{array} = 2A$$

$$\left\{\begin{array}{l}(t't'')^2 = (x'^2 + x'(x'' + x''') + x''x''')^2 = (x''x''' - x'x'''')^2\\ \qquad = (x''x''')^2 + (x'x'''')^2 - 2C\end{array}\right.$$

$$B' = \begin{array}{l}(t't''')^2 = \ldots\ldots = (x'x''')^2 + (x''x'''')^2 - 2C\\(t''t''')^2 = \ldots\ldots = (x'x'')^2 + (x'''x'''')^2 - 2C\end{array}$$

Ed in conseguenza $B' = \Sigma(x'x'')^2 - 6C$: ma $\Sigma(x'x'')^2 = A^2 + 2C$, dunque infine $B' = A^2 - 4C$.

Abbiamo ancora $t't''t''' = \begin{array}{l}x'^3 + x''\ )\\ \quad + x'''\ )\\ \quad + x'''\ )\end{array}\ \begin{array}{l}x'^2 + x''x'''\ )\\ \quad + x''x''''\ )\\ \quad + x'''x'''')\end{array}$

$+ x''x'''x'''' = \Sigma x'x''x''' = B$

Adunque $C' = (t't''t''')^2 = B^2$. Perciò la *trasformata* del quarto grado sarà;

$$t^6 + 2At^4 + (A^2 - 4C)t^2 - B^2 = 0$$

Con la soluzione di questa derivativa del terzo grado si avranno le sei *radici* $\pm t'$, $\pm t''$, $\pm t'''$, e da esse le quattro x', x'', x''', x'''' della *proposta*.

Si osservi che qualora nel calcolo del prodotto $t'\,t''\,t''' = B$ si fossero prese le radici negative $-t' - t'' - t'''$, sarebbe resultato evidentemente $-t'\,t''t''' = -B$, e ciò non ostante, lo stesso prodotto

$(t't''t''')^2 = B^2 = C'$ come pure gli stessi coefficienti A', B', e collo stesso segno. Ora è visibile che il prendere le radici *t negative* cangia le radici *x* di *positive* in *negative*, e viceversa; vale a dire si ottiene $-x = \frac{1}{2}(-t'-t''-t''')$, $-x'' = \frac{1}{2}(-t'+t''+t''')$, $-x''' = \frac{1}{2}(-t''+t'+t''')$, $-x'''' = \frac{1}{2}(t'''+t'+t'')$: con tal cangiamento la *proposta* diventa

$$x^4 + Ax^2 - Bx + C = 0$$

in cui non vi è altra diversità che nel segno del coefficiente B. Adunque la stessa *trasformata* risolve l'equazioni di 4°. *grado* nel doppio caso del secondo coefficiente B *positivo*, o *negativo*.

Dalla forma dei valori delle *radici x si* vede 1°. Che se le sei radici della *trasformata* sono tutte reali, anche le radici *x* saranno tutte reali.

2°. Avendo la *trasformata* il suo ultimo termine necessariamente *negativo*, questo non può resultare che dal prodotto di tre *fattori* tutti *negativi*, o sivvero di due *positivi*, e di uno *negativo*. Perciò qualora la *trasformata* abbia le sue tre *radici quadratiche reali*, o deve averle tutte *positive*, ovvero una *positiva*, e le altre due *negative*. In questo ultimo caso le quattro *radici* della *proposta* saranno *immaginarie*, se pure le due *negative* della *trasformata* non fosseso trà loro eguali; poichè in tale ipotesi le due *negative* si distruggerebbero in due delle radici *x*, e queste diverranno eguali, e *reali*.

3°. Allorchè la *trasformata* ha una *radice quadratica reale*, e due *immaginarie*, la *reale* deve essere *positiva*. Infatti le due *immaginarie* dipendono da una equazione di secondo *grado* coll'ultimo ter-

mine *positivo*, cioè della forma $z^2 + Az + B = 0$, in cui B sia maggiore di $\frac{A^2}{4}$. Conviene adunque che il *fattore* di primo *grado* contenente la radice *reale* sia della forma $z - z'$ acciò l'ultimo termine *della trasformata* riesca *negativo* come dee essere, e perciò la *radice reale* z' sarà *positiva*.

Ponendo $-\frac{A}{2} = a$, $B - \frac{A^2}{4} = b^2$, le due *radici immaginarie* della *trasformata* saranno;

$$z = a \pm \sqrt{(-b^2)} = a \pm b\sqrt{(-1)}$$

Da ciò accaderà che in due dei quattro valori di z avremo la quantità, $\sqrt{(a+b\sqrt{-1})} + \sqrt{(a-b\sqrt{-1})}$ ed in altri due la quantità $\sqrt{(a+b\sqrt{-1})} - \sqrt{(a-b\sqrt{-1})}$ Alzando al quadrato ciascuna di queste quantità, trovo la prima $\sqrt{(a+b\sqrt{-1})} + \sqrt{(a-b\sqrt{-1})} = \sqrt{(2a+2\sqrt{(a^2+b^2)})}$, cioè *reale*, e la seconda $\sqrt{(a+b\sqrt{-1}} - \sqrt{a-b\sqrt{-1}} = \sqrt{(2a-2\sqrt{(a^2+b^2)})}$, cioè *immaginaria*, essendo evidentemente $2\sqrt{(a^2+b^2)} > 2a$. Pertanto se la *trasformata* ha due *radici immaginarie*, la *proposta* ne avrà pure due *immaginarie*, e le altre due *reali*.

Siccome la *trasformata* è *derivativa* del terzo *grado*, e *completa*, gioverà nell' applicarla a qualche esempio toglierne il secondo termine facendo $t^2 = z - \frac{2A}{3}$ (102). Così essa diverrà;

$$z^5 - \left(\frac{A^2}{3} + 4C\right)z - \frac{2A^3}{27} + \frac{8AC}{3} - B^2 = 0;$$

e per mezzo di questa potremo distinguere dai coefficienti della *proposta* le qualità delle *radici* della *trasformata*, le quali saranno tutte *reali* semprechè si abbia (104).

$$\frac{1}{27}\left(\frac{A^2}{3} + 4C\right)^3 > \frac{1}{4}\left(\frac{2A^3}{27} + \frac{8AC}{3} - B^2\right)$$

Finalmente allorchè *la trasformata* ha due *radici negative* $-t''^2 - t'''^2$, i quattro valori *immaginarj* di x saranno;

$$x = \frac{1}{2}\left(t' + (t'' + t''')\sqrt{-1}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(t' - (t'' + t''')\sqrt{-1}\right)$$

$$x = -\frac{1}{2}\left(t' + (t'' - t''')\sqrt{-1}\right)$$

$$x = -\frac{1}{2}\left(t' - (t'' - t''')\sqrt{-1}\right)$$

Tuttavia il prodotto dei primi due, e del terzo col quarto valore di x danno visibilmente due *fattori reali* di secondo *grado*. Lo stesso accade allora quando la *trasformata* ha due *radici immaginarie* $\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}$, $\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}$, perchè ancora in questo caso le due *radici immaginarie* della *proposta*

$$x = -\frac{1}{2}\left(t' + \sqrt{(2a - 2\sqrt{a^2 + b^2})}\right)$$

$$x = -\frac{1}{2}\left(t' - \sqrt{(2a - 2\sqrt{a^2 + b^2})}\right)$$

danno un prodotto *reale* di secondo *grado*. Si dee dunque generalmente conchiudere, *che qualunque equazione di quarto grado contiene due fattori reali di secondo grado*

Basti un solo esempio aritmetico della risoluzione delle equazioni di quarto *grado*, e sia proposto di *trovare tre numeri in continua proporzione geometrica, talmente chè il prodotto del primo pel secondo sia* 4, *e sia parimente* 4 *la differenza frà il terzo, e la somma dei due primi.*

Posto x il medio proporzionale, le condizioni del Problema danno;

$$\frac{4}{x} : x = x : 4 + \frac{4}{x} + x;$$

E di qui $x^4 - 4x^2 - 16x - 16 = 0$, la di cui *trasformata* è $t^6 - 8t^4 + 80t^2 - 256 = 0$. Posto $t^2 = z + \frac{8}{3}$ a fine di togliere il secondo termine, ottengo;

$$z^3 + \frac{176}{3}z - \frac{2176}{27} = 0.$$

Ovvero facendo $y = 3z$ per togliere le frazioni, sarà;

$$y^3 + 528y - 2176 = 0$$

Sperimento col noto metodo (104) se questa equazione abbia *radici razionali*, e trovo $y = 4$, e dipoi le altre due $y = -2 \pm 6\sqrt{-15}$. E siccome $t^2 = \frac{3z+8}{3} = \frac{y+8}{3}$, avrò; $t' = \pm 2$, $t'' = \pm\sqrt{(2 + 2\sqrt{(-15} = \pm(\sqrt{5} + \sqrt{-3})}$, $t''' = \pm(\sqrt{5} - \sqrt{-3})$.

Dunque le quattro radici della *proposta* sono; $x' = 1 + \sqrt{5}$, $x'' = 1 - \sqrt{5}$, $x''' = \sqrt{-3} - 1$. $x'''' = -\sqrt{-3} - 1$; ed il problema sarà sciolto egualmente colle seguenti quattro proporzioni;

$$\frac{4}{1+\sqrt{5}} : 1 + \sqrt{5} = 1 + \sqrt{5} : \frac{14 + 6\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}$$

$$\frac{4}{1-\sqrt{5}} : 1 - \sqrt{5} = 1 - \sqrt{5} : \frac{14 - 6\sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{-3}-1} : \sqrt{-3}-1 = \sqrt{-3}-1 : 2$$

$$\frac{4}{1+\sqrt{-3}} : 1+\sqrt{-3} = 1+\sqrt{-3} : -2$$

Riguardo all' ultima di tali proporzioni conviene avvertire, che essendosi cangiata l' x'''' in $-x''$, il terzo termine -2 esprime la differenza frà la somma dei primi due, ed il numero 4; ovvero che il numero 4 è la differenza fra la somma dei primi due, ed il terzo.

CAP VII.

Potenze, e Radici

110. Se nel prodotto di m binomj $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+t)$ si prendano eguali ad a tutte le $m-1$ quantità $b, c \ldots\ldots t$ avremo evidentemente $(x+a)^m$; cioé lo sviluppo del binomio $x+a$ elevato ad una qualunque potenza m intiera, e *positiva*. Si é già veduta (99) la forma del primo prodotto, dalla quale si argomenta senza difficoltà, che posto m numero intiero, e positivo, lo sviluppo del binomio $(x+a)^m$ avrà la forma seguente;

$$x^m + Ax^{m-1}a + Bx^{m-2}a^2 + Cx^{m-3}a^3 \ldots\ldots + a^m \quad (X)$$

Sarà inoltre il coefficiente $A = m$ somma delle quantità a dei binomj m; il coefficiente B eguaglierà il numero dei prodotti binari che possono farsi con un numero m di lettere; il coefficiente C sarà il numero di tutti i prodotti ternari delle stesse lettere: dipoi segue D eguale alla somma di tutti i quadernari, e così progressivamente fino all' ultimo termine a^m, che è il prodotto di tutte le m lettere

eguali ad a. Adunque per comporre i termini della serie (X) altro non resta che calcolare generalmente il numero dei prodotti binari, ternari ec. di m lettere, che è quanto dire il numero delle loro diverse combinazioni prendendole a due, a due, a tre a tre.... a m. Ma qualora mi occupassi di questo non difficile problema, è visibile che esso non servirebbe (almeno direttamente) che allo sviluppo di $(x+a)^m$ nell' unico caso dell' esponente m intero, e *positivo* Tenterò adunque altra via di ottenere lo stesso sviluppo, qualunque sia m, intiero, *frazionario*, *irrazionale*, *immaginario ec*, *potitivo*, *o negativo*.

111. L' analogia conduce naturalmente a pensare, che per qualsivoglia valore di m la serie esprimente in generale $(x+a)^m$ debba essere simile alla serie (X), perchè appunto la prima dee ridursi a questa allorchè m è numero intiero, e positivo. Osservo ancora che $x+a=x(1+\frac{a}{x})$; ovvero, fatto $\frac{a}{x}=y$, $x+a=x(1+y)$: donde si deduce $(x+a)^m=x^m(1+y)^m$ qualunque sia l' esponente m (64). Adunque la serie ricercata per lo sviluppo generale di $(x+a)^m$ si riduce allo sviluppo di $(1+y)^m$, in cui sono due sole *indeterminate* y, m; ed i termini di questo sviluppo dovranno in conseguenza essere *funzioni* delle sole *variabili* y, m, e di quantità *costanti*. Allorchè m é numero intero, e *positivo*, gli esponenti di a nella serie (X) seguono l' ordine dei numeri naturali $1, 2, 3 \ldots m$, ma non si può gratuitamente asserire che debbano in y mantenersi co-

tanti cioè nell'ordine medesimo per qualunque valore di m. Incomincio non pertanto dai supporli tali, e dal supporre a norma delle precedenti riflessioni che lo sviluppo del binomio $(1+y)^m$ sia;

$$1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\text{ec} \quad (Y)$$

Quindi per dimostrare la legittimità delle serie (Y) ed il modo di determinare i coefficienti A, B. C ec. divido il mio ragionamento nei cinque articoli, che seguono.

1°. Il primo termine della serie (Y) é necessariamente 1. Infatti dovendo questa essere generale, che é quanto dire, dovendo servire a tutti i casi particolari, nel caso di $y=o$, resta il binomio $(1+y)^m=1$, e tanto dee restare il suo sviluppo, come resta di fatto, posto $y=o$ in (Y).

2°. Gli esponenti dell'*indeterminata* y non possono essere *negativi*. Poichè se avessimo in (Y) un termine di questa forma Py^{-p}, cioè $\frac{P}{y^p}$, questo nel caso di $y=o$ diverrebbe infinito (60); e perciò non avremmo altrimenti in questo caso $(1+y)^m=1$, ma sivvero $1=1+\infty$ con patente assurdo.

3°. Non possono gli esponenti di y essere *frazionari*. Imperciocchè supponendo in (Y) un termine almeno della forma $Py^{\frac{p}{r}}$, converrebbe che nel binomio $(1+y)^m$ si trovasse un simile esponente in y, ovvero che m fosse una frazione $\frac{m}{n}$: poiche è

evidente che in generale lo sviluppo di una *funzione* non può contenere elementi di natura diversa da quelli della *funzione*. Ora essendo quì la y quantità *indeterminata* è necessario considerarla disciolta dall' ipotesi particolare di essere quantità *radicale*. Resta pertanto a considerarsi unicamente il caso dell' esponente *frazionario* $\frac{m}{n}$, a cui può soggiacere il binomio $(1+y)^{\frac{m}{n}}$ mantenendosi y indeterminata Facciamo adunque l' ipotesi che nello sviluppo di $(1+y)^{\frac{m}{n}}$ possa esistere il termine $Py^{\frac{p}{r}}$.

Posto $z=(1+y)^{\frac{m}{n}}$ si potrà dedurre l' equazione $z^n-(1+y)^m=o$, la quale (99) avrà un numero n di *radici*, o sivvero un numero n di valori dell' incognita $z=(1+y)^{\frac{m}{n}}$. Adunque il binomio $z=(1+y)^{\frac{m}{n}}$ ha un numero n di valori differenti, e tanti per conseguenza ne deve essere il suo sviluppo. Che se in questo vi si trovasse almeno un termine $Py^{\frac{p}{r}}$ avrebbe esso solo un numero r di valori differenti, e così lo svilpppo di $(1+y)^{\frac{m}{n}}$ non avrebbe già un numero n di valori, ma inoltre tutti questi valori combinati coi valori di r; e quindi un numero di valori maggiore di quello che gli compete, lo che è assurdo.

Dagli articoli 2°, e 3°. risulta; che non potendo i coefficienti dell' indeterminata y essere giammai *negativi*, ne *frazionari*, ma bensì *positivi*, ed in-

tieri, saranno essi necesseriamente *indipendenti* dall' esponente variabile m, che può essere *negativo*, e *frazionario*. E siccome nel binomio $(1+y)^m$ le *indeterminate* non sono che y, ed m, così nel suo sviluppo (Y) non debbono esservi altre quantità *indeterminate* fuori di queste: donde ne segue che gli esponenti di y dovranno essere *costanti*, vale a dire dovranno conservarsi i medesimi per tutti i valori possibili di y, e di m. Se adunque nel caso di m numero intiero, e *positivo* si trovano gli esponenti d' y disposti nell' ordine naturale dei numeri 1, 2, 3 ec, quest' ordine non dovrà cangiarsi qualunque sieno le quantità y, m.

4° Il coefficiente A del secondo termine di (Y) deve essere sempre m. Supponendo infatti che A potesse essere nei diversi casi una *funzione* $\varphi.m$ diversa da m, sarebbe:

$$(1+y)^m = 1+y\varphi m+ \text{ec.}$$

E ponendo $2m$ invece di m avremmo del pari $(1+y)^{2m} = 1+y\varphi.2m+$ ec. Ma $(1+y)^{2m} = (1+2y+y^2)^m = 1+2y\varphi.m+$ ec: resultamento che dovendo essere *identico* col precedente dà necessariamente $\varphi.2m=2\varphi m$. E' d' altronde visibile che qualunque sia φm potrà sempre cangiarsi in $m\varphi' m$, e conseguentemente $\varphi 2m$ in $2m\varphi' 2m$. Adunque se $\varphi.2m=2\varphi.m$ sarà ancora $2m\varphi.2m=2m\varphi' m$, e quindi $\varphi' 2m=\varphi' m$.

Ora l' *identità* di $\varphi' 2m$, e $\varphi' m$ non può giammai sussistere se non quando vadano a *zero* sì nell' una, che nell' altra *funzione* tutti i termini colla *variabile* m, e resti così in amendue le *funzioni* una istessa *costante*, che chiamerò b. Sarà perciò necessariamente $\varphi'.2m=\varphi' m=b$; e quindi $\varphi m=m\varphi' m=bm=A$.

Ciò posto avremo $(1+y)^m = 1+bmy+$ ec.; la quale equazione dee pur verificarsi qualunque sia l'esponente m. Dunqne nel caso di $m=1$ dovrà essere pure $1+y=1+by$, e percio la *costante* $l=1$. Laonde il coefficiente A dimostrato eguale a bm dovrà ridursi ad m per servire a tutti i valori possibili dell' esponente m.

Se mai il ragionamento qui sopra fatto per dimostrare $\varphi' m=b$ sembrasse oscuro, può dilucidarsi con questo esempio.

Supponiamo la *funzione* $\varphi m=a+bm+cm^2+dm^3+$ ec. in cui sieno *costanti* le quantità a, b, c, d ec. Poichè si è posto $\varphi.m=\varphi' m$, sarà;

$$\varphi' m = a+b+cm+dm+\text{ec.}$$

$$\varphi' 2m = \frac{a}{m}+b+2cm+4dm^2+\text{ec.}$$

Ma dallo sviluppo di $(1+y)^{2m}$ abbiamo in A una tal *funzione* φm, che cangiando m in $2m$ dee risultare $\varphi.2m=2\varphi m$, e quindi $\varphi'.2m=\varphi'.m$: perciò i secondi membri delle precedenti equazioni debbono essere *identici*. Ora ciò non può avvenire se non sia $a=c=d=$ec $=o$, e resti così $\varphi'.2m=\varphi m=b$ quantità *costante*, conforme si era conchiuso di sopra.

5°, Restano adesso a determinarsi nella serie (Y) gli altri coefficienti B, C, D ec, che già si vede dovere essere *funzioni* di m. A tale uopo riprendo la stessa serie ponendovi m in luogo di A, e formo l' equazione;

$$(1+y)^m = 1+my+By^2+Cy^3 \ldots\ldots +Ty^n+\text{ec.}$$

Ho posto Ty^n per esprimere qualsivoglia termine

della serie (Y) soltanto che invece di n si sostituisca un numero intiero qualunque $1, 2, 3, 4 \ldots n$, e si intenda T il coefficiente che gli conviene; perciò $T\overset{n}{y}$ dicesi il *termine generale*.

Cangiando nella *proposta* la y in $y+i$, e supponendo i una nuova *indeterminata*, avrò similmente;

$$(1+y+i)^m = 1+m(y+i)+B(y+i)^2+C(y+i)^3 \ldots$$
$$+T\overset{n}{y}\,(1+\frac{i}{y})^n + \text{ec.}$$

La differenza delle precedenti equazioni divisa per i somministra;

$$\frac{(1+y+i)^m-(1+y)^m}{i} = m+B(2y+i)+C(3y^2+3yi+i^2)$$
$$\ldots\ldots + T\overset{n}{y}\,(\frac{n}{y}+\frac{Bi}{y^2}+\text{ec.})+\text{ec.}$$

Ma riflettendo che $(1+y+i)^m = (1+y)^m\,(1+\frac{i}{1+y})^m$
$$=(1+y)^m\,(1+\frac{mi}{1+y}+\frac{Bi^2}{(1+y)^2}+\text{ec})$$

Si deduce $\frac{(1+y+i)^m-(1+y)^m}{i} = (1+y)^m$
$(\frac{m}{1+y}+\frac{Bi}{(1+y)^2}+\text{ec.})$, e perciò;

$$(1+y)^m\,(\frac{m}{1+y}+\frac{Bi}{(1+y)^2}+\text{ec.}) = m+B(2y+i)+\ldots$$

$$+C(3y^2+3yi+i^2)\ldots+Ty^n\left(\frac{n}{y}+\frac{Bi}{y^2}+\text{ec.}\right)$$

Questo risultamento generale deve aver luogo per tutti i valori, che potranno darsi all' indeterminata i, ed in conseguenza anche allorquando sia $i=o$. Avremo pertanto in questo caso;

$$\frac{m(1+v)^m}{1+y}=m+2By+3Cy^2\ldots\ldots+nTy^{n-1}+\text{ec.}$$

Ponendo la serie (Y) invece di $(1+y)^m$, e moltiplicando per $1+y$ ottenge;

$$my^2+Bmy^2+Cmy^3\ldots\ldots+mTy^n=(2B+m)y+(2B+3C)y^2\ldots\ldots+(n-1)S+nT)\ y^{n-1}+\text{ec.}$$ intendendo S il coefficiente del termine Sy^{n-1}, che precede Ty^n. Ma acciò sussista questa ultima equazione nell' ipotesi nostra di essere y *indeterminata* indipendente da m, e dagli altri coefficienti B, C... T che pur sono *funzioni* di m conviene che sieno eguali i coefficienti delle medesime potenze di y. Sarà adunque

$$2B+m=m^2$$
$$2B+6C=Bm$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n-1)S+nT=Sm$$

Dalle quali equazioni si deduce:

$$B=\frac{m.\,m-1}{2}$$

$$C=\frac{B(m-2)}{3}=\frac{m.\,m-1.\,m-2}{2\,3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T=S\left(\frac{m-n+1}{n}\right)=\frac{m\,m-1.\,m-2.\ldots(m-n+1)}{2.3.4\ldots\ldots n}$$

Rammentandosi infine che ci siamo partiti dall' ipotesi di $y = \frac{a}{x}$, avremo con tale sostituzione;

$$\left(1 \pm \frac{a}{x}\right)^m, \text{ ovvero } \frac{(x \pm a)^m}{x^m} = 1 \pm \frac{ma}{x} + \frac{m.m-1}{2} \frac{a^2}{x^2}$$

$$\pm \frac{m\,m-1.m-2}{2.3} \frac{a^3}{x^3} \ldots \pm \frac{m\,m-1.m-2.(m-n+1)}{2.3\ldots\ldots n} \frac{a^n}{x^n}$$

E di qui il richiesto sviluppo generale di qualunque potenza m di un binomio, cioè;

$$(x \pm a)^m = x^m \pm mx^{m-1} a + \frac{m.m-1}{2} x^{m-2} a^2 + \frac{m\,m-1.m-2}{2.3} x^{m-3} a^3 \ldots\ldots\ldots \pm \frac{m\,m-1.m-2\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots\ldots n} x^{m-n} a^n \pm \text{ec.}$$

E' facile osservare che allora quando il secondo termine a del proposto binomio sia *negativo*, lo sviluppo di $(x-a)^m$ non cangia dalla *formola* precedente se non in quanto alla quantità *negativa* $-a$; ed in conseguenza le potenze pari di $-a$ saranno tutte *positive*, e le dispari *negative*, il che produrrà che i segni dei termini dello sviluppo saranno in $(x-a)^m$ alternativamente *positivi o negativi*. Così adoprando il doppio segno $\pm$ per esprimere generalmente i due casi di a *positiva o negativa*, la formola diverrà in generale;

$$(x \pm a)^m = x^m \pm m x^{m-1} . a + \frac{m\,m-1}{2} x^{m-2} . a^2 \pm \frac{m\,m-1.m-2}{2.3}$$

$$x^{m} \cdot a^{3} \cdot \ldots \pm \frac{m.m-1.m-2\ldots(m-n+1)}{2.3.\ldots.n} x^{m-n} \cdot a^{n},$$

intendo che nel *termine generale*, e nel caso di a *negativa*, si debba prendere il segno $+$ quando n è numero pari, ed il segno $-$ quando è dispari.

Dall'ordine che seguono i coefficienti $m, \frac{m.m-1}{2}$ ec. risulta ad evidenza che la *formola* dello sviluppo di $(x \pm a)^{m}$ conterrà un numero definito $m+1$ di termini nel caso unico dell'esponente m intiero, e *positivo*, e sarà a^{m} il suo ultimo termine. In ogni altro caso di m *negativo*, *frazionario* ec, il numero dei suoi termini sarà infinito.

112. Questa istessa *formola* si può estendere ad un polinomio qualunque da elevarsi a qualsivoglia potenza m.

Sia il polinomio $x+a+b+c+d+$ ec, e vogliasi lo sviluppamento di $(x+a+b+c+d+\text{ec})^{m}$. Per abbreviare le espressioni scriverò Σa invece di $a+b+c+d+$ ec, Σb invece di $b+c+d+$ ec, e così progressivamente. Così la *formola* del binomio potenziato (trascurato il doppio segno $\pm$) diverrà primieramente;

$$(x+\Sigma a)^{m} = x^{m} + m\Sigma a x^{m-1} + \frac{m.m-1}{2}(\Sigma a)^{2} x^{m-2} \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{m.m-1\ldots m-n+1}{2.3.\ldots.n}(\Sigma a)^{n} x^{m-n} + \text{ec.}$$

Troppo lungo sarebbe lo sviluppare partitamente le diverse potenze $\Sigma a, (\Sigma a)^{2} \ldots (\Sigma a)^{n}$ per compire i

termini della serie richiesta; che però tornerà assai più commodo l'investigare l'espressione del coefficiente $\frac{m.m-1\ldots m-n+1}{2.3\ldots n}(\Sigma a)^n$ del *termine generale*, acciò si possa così determinare agevolmente qualunque termine n^{simo} della serie, nella quale già sappiamo che n è sempre numero intiero, e *positivo*, qualunque sia l'esponente m della potenza. A tale oggetto osservo che dalla *formola* del binomio si deduce;

$$(\Sigma a)^n = a^n - na^{n-1}.\Sigma b + \frac{n.n-1}{2} a^{n-2} (\Sigma b)^2 \ldots +$$

$$\ldots + \frac{n.n-1\ldots(n-n'+1)}{1.2.3\ldots n'}(\Sigma b)^{n'} a^{n-n'}$$

$$(\Sigma b)^{n'} = b^{n'} + n'b^{n'-1} \Sigma c \ldots +$$

$$+ \frac{n'.n'-1\ldots(n'-n''+1)}{1.2.3\ldots n''}(\Sigma c)^{n''} b^{n'-n''}$$

$$(\Sigma c)^{n''} = c^{n''} + n''c^{n''-1} \Sigma d \ldots +$$

$$+ \frac{n''n''-1\ldots(n''-n'''+1)}{2.2.3\ldots\ldots n'''}(\Sigma d)^{n'''} c^{n''-n'''}$$

E così di seguito fino all' ultimo termine del proposto polinomio. Sostituendo adesso in luogo di $(\Sigma a)^n$ il suo *termine generale*; dipoi in questo in luogo di $(\Sigma b)^{n'}$ il respettivo suo *termine generale*, e progredendo in tal guisa fino all' ultimo termine del polinomio, che quì per brevità supporremo essere d, risulta;

$$\frac{n.m-1\ldots m-n+1(\Sigma a)}{1.2.3.\ldots\ldots n}\,x^{n}=\frac{m\,m-1\ldots m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\,x^{m-n}$$

$$\frac{(n.n-1\ldots n-n'+1)}{1.2.3\ldots n'}\,\frac{(n'.n'+1\ldots n'.n''+1)}{1.2.3\ldots n''}$$

$$\frac{(n''\,n''-1\ldots n''-n'''+1)}{1.2.2\ldots n'''}\,a^{n-n'}\,.\,b^{n'-n''}\,.\,c^{n''-n'''}\,.\,d^{n'''}$$

E poichè n, n', n'', n''' ec. sono necessariamente numeri intieri, e *positivi* si avrà la serie intiera dei numeri naturali da 1 fino ad n aggiungendo in $n.n-1\,.\,n-n'+1$ i fattori $1.2.3.\,.\,n-n'$; si avrà la serie medesima da 1 fino ad n'' se in $n\,n-1\ldots\,.\,n'-n''+1$ si aggiungano i fattori $1\,2.3\ldots n'-n''$, e lo stesso succederà con simili aggiunte in tutti i numeratori composti di n, n', n'', n''' ec Adunque moltiplicando anche i denominatori respettivi (a fine di non alterare il valore delle frazioni) per i fattori medesimi, e cancellando nel prodotto i fattori comuni ai termini delle frazioni, resterà;

$$\frac{m\,m-1\ldots m-n+1(\Sigma a)}{2.3.\ldots\ldots n}\,x^{n}=\frac{m\,m-1.\,m-n+1}{2.3.\ldots n}\,x^{m-n}$$

$$\frac{(1\,2.3\ldots n.\,a^{n-n'}\,b^{n'-n''}\,.\,c^{n''-n'''}\,.\,d^{n'''})}{1\,2\ldots n-n'\times 1.2\ldots n'-n''\times 1\,2\ldots n''n'''\times 1\,2\ldots n'''}$$

Prendiamo per maggior brevità $n-n'=p$
$n'-n''=q$
$n''-n'''=r$
$n'''=s$

Sommando queste equazioni si vede che $p+q+r+s=n$, ed il termine generale richiesto sarà;

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots n.\,a^{p}\,b^{q}\,c^{r}\,d^{s}}{1.2\ldots p\times 1.2\ldots q\times 1.2\ldots r\times 1.2\ldots s}\;;$$

che si potrà estendere a piacimento secondo il numero dei termini del proposto polinomio.

Si osservi che nel prodotto $a^p\, b^q\, c^r\, d^s$ ec. si intendono contenute tutte le potenze da *zero* fino ad n inclusivamente di ciascuna delle lettere a, b, c, d ec, e che la somma degli esponenti in qualunque termine dee essere costantemente eguale ad n, e dee comporre questo numero in tutte le possibili maniere con numeri *positivi*, ed intieri. Formate con questa norma tutte le combinazioni dei prodotti espressi generalmente da $a^p\, b^q\, c^r\, d^s$ ec, sarà facile comporre il suo coefficiente numerico applicandovi secondo la *formola* precedente i diversi valori dati agli esponenti p, q, r, s ec.

Sia proposto per esempio di trovare il sesto termine del polinomio potenziato $(x+a+b+c+d)^m$. Esso sarà generalmente espresso così

$$\frac{(m\, m-1\, m-2 \ldots m-5\, x^{m-6})}{2.3.4.5.6}$$

$$\frac{(1.2.3.4.5.6.\, a^p\, b^q\, c^r\, d^s)}{1.2.3\ldots p \times 1.2\ldots q \times 1.2\ldots r \times 1.2\ldots s}$$

e sarà $p+q+r+s=n=6$ equazione indeterminata, che dee essere risoluta in tutti i modi possibili con numeri intieri, e *positivi*. Posto $p=6$, resteranno *zero* q, r, s, onde si avrà $a^p\, b^q\, c^r\, d^s = a^6$; e poichè questo resultamento deve estendersi a tutte le altre lettere, l'espressione generale $a^p\, b^q\, c^r\, d^s$ darà per suo compimento $a^6+b^6+c^6+d^6$, la qual somma rappre-

senterò compendiosamente, scrivendo Σa^{6}.

Posto $p=5$, sarà $q=1$, e resteranno zero r, s.

Adunque in questo caso $a^{p} b^{q} c^{r} d^{s} = \Sigma a^{5} b$, intendendo con $\Sigma a^{5} b$ la somma di tutte le possibili combinazioni delle lettere a, b, c, d cogli esponenti 5, 1, cioè $a^{5} b$, $b^{5} a$, $a^{5} c$, $c^{5} a$ ec. Preso $p=4$ potrà essere $q=2$, $r=s=0$; ovvero $q=1$, $r=1$, $s=0$; e quindi $a^{p} b^{q} c^{r} d^{s} = \Sigma a^{4} b^{2} + \Sigma a^{4} bc$; interpetrando come sopra le due somme notate col segno Σ. Continuando con tal metodo la risoluzione della equazione $p+q+r+s=n=6$, e ponendo in ciascun coefficiente numerico di $a^{p} b^{q} c^{r} d^{s}$ i congrui valori di p, q, r, s formo per esteso il richiesto sesto termine nel modo che vedesi;

$$\frac{m\,m-1.m-2\ldots.m-5x^{m-6}}{2.3.4.5.6.} \times$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma a^{6} + 6\Sigma a^{5} b + 3\cdot 5\Sigma a^{4} b^{2} \\ + 5\cdot 6\Sigma a^{4} bc + 4.5\Sigma a^{3} b^{3} + 3.4.5\Sigma a^{3} b^{2} c \\ + 4.5.6\Sigma a^{3} bcd + 3.5.6\Sigma a^{2} b^{2} c + 2.3.5.6\Sigma a^{2} b^{2} cd \end{array}\right\}$$

Sia proposto inoltre di sviluppare il polinomio $(x+ay+by^{2}+cy^{3}-dy^{4}+\text{ec.})^{m}$ secondo le potenze di y. Per abbreviare le espressioni dei termini della serie, che si cerca, scriverò A, B, C ec. invece dei coefficienti già noti di x^{m}, x^{m-1}, x^{m-2} ec. e scri-

verò Σay invece di $ay + by^2 + cy^3 +$ ec. Così lo sviluppo richiesto sarà primieramente:

$$x^m + Ax^{m-1}\Sigma ay + Bx^{m-2}(\Sigma ay)^2 + Cx^{m-3}(\Sigma ay)^3 \ldots + Tx^{(m-n)}(\Sigma ay)^n.$$

Ed il *termine generale* che riguarda $(\Sigma ay)^n$ sarà in questo caso;

$$\frac{1.2\ldots\ldots n(ay)^p(by^2)^q(cy^3)^r(dy^4)^s(ey^5)^t \text{ ec.}}{1.2\ldots\ldots p\times 1.2\ldots q\times 1.2\ldots r\times 1.2\ldots s\times 1.2\ldots t \text{ ec.}}$$

Colla risoluzione già insegnata qui sopra dell' equazione $p+q+r+$ ec$=n$, in cui faccio gradatamente $n=1, 2, 3$ ec, e colla scorta del *termine generale*, ottengo senza difficoltà la seguente serie calcolata fino al termine in cui si trova y^5, dalla formazione della quale apparisce il modo di proseguirla.

$$x^m + Ax^{m-1}ay + Ax^{m-1}b\,y^2 + Ax^{m-1}c\,y^2 + \left.\begin{matrix} Bx^{m-2}a^2 \\ \\ \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} Bx^{m-2}2ab \\ Cx^{m-3}a^3 \end{matrix}\right\}$$

$$+ Ax^{m-1}d\,y^4 + Ax^{m-1}e\,y^5 + \text{ec.}$$

$$\left.\begin{matrix} Bx^{m-2}b^2 \\ Bx^{m-2}2ac \\ Cx^{m-3}ab^2 \\ Dx^{m-4}a^4 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} Bx^{m-2}2ad \\ Bx^{m-2}1bc \\ Cx^{m-3}ac^2 \\ Cx^{m-3}2ab \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} Dx^{m-4}ab^3 \\ Ex^{m-5}a^5 \end{matrix}\right\} y^5$$

113. Si è veduto il metodo da tenersi per togliere il secondo termine dalle equazioni, ed in specie da quelle di terzo, e quarto grado (102). Colla *formola* del binomio potenziato si spiega molto più generalmente il metodo di togliere dalle equazioni uno qualunque dei suoi termini. Sia pertanto l'equazione

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots\ldots + U = 0$$

Sostituendo $y + a$ in luogo di x, ed ordinando il resultamento rapporto alle potenze di y, si ottiene;

$$\left.\begin{array}{l} y^m + may^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} a^2 y^{m-2} \ldots\ldots + a^m + \\ + Ay^{m-1} + (m-1)Aay^{m-2} \ldots\ldots + Aa^{m-1} \\ + By^{m-2} \ldots\ldots\ldots\ldots + Ba^{m-2} \\ \vdots \\ + U \end{array}\right\} = 0$$

Volendo togliere il secondo termine, facciasi $ma + A = 0$, e quindi $a = -\frac{A}{m}$ come abbiamo insegnato (102). Se si vuol togliere il terzo termine affetto da y^{m-2}, convien fare $\frac{m.m-1}{1^2} a^2 + m-1\, Aa + B = 0$, e colla risoluzione di questa equazione di secondo grado si troverà quel valore di a atto a far sparire il terzo termine.

Seguitando in tal guisa per ciascuno dei termini successivi, si riconosce agevolmente che l'eliminazione del quarto termine dipende da un equa-

zione di terzo grado, l'eliminazione del quinto da una di quarto grado, e così fino all' ultimo termine che non si potrà eliminare se non risolvendo l'equazione $a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} \ldots + U = 0$ simile in tutto alla *proposta*.

114. L'estrazione della *radice* di qualunque grado m da una data quantità complessa dipende pure dalla *formola* del binomio. Rappresenti X la data quantità; siccome essa è composta interamente di quantità note, potremo intenderla ridotta ad un binomio, di cui il primo termine sia la massima *potenza* m^{sima} compresa in X, ed il secondo sia il residuo *positivo o negativo* della stessa X; vale a dire potremo sempre ridurre $X = a^m \pm b$. Rammentandosi adesso che $X^{\frac{1}{m}}$ significa la *radice* m^{sima} di X (59), non vi ha dubbio che $(a^m \pm b)^{\frac{1}{m}}$, ovvero $a\left(1 \pm \frac{b}{a^m}\right)^{\frac{1}{m}}$ darà col suo sviluppamento la *radice* richiesta di X; e che se la frazione $\frac{b}{a^m}$ è piccolissima, basteranno pochi termini della serie per avere questa *radice* assai approssimata. Sarà dunque in generale;

$$\sqrt[m]{X} = a\left(1 \pm \frac{b}{a^m}\right)^{\frac{1}{m}} = a\left(1 \pm \frac{b}{ma^m} + \left(\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m} - 1\right)\frac{b^2}{2.a^{2m}}\right.$$

$$+\left(\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}-1\cdot\frac{1}{m}-2\right)\frac{b^3}{2.3a^{3m}}+\text{ec.}$$

Riducendo a rotto le quantità $\frac{1}{m}-1$; $\frac{1}{m}-2$ ec. moltiplicando i loro denominatori, e facendo per brevità $\frac{b}{ma^m}=c$, avremo piu semplicemente;

$$\sqrt[m]{X}=a\left(1\pm c+\frac{(1-m)}{2}c^2\pm\frac{(1-m)(1-2m)}{2.3}c^3\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\pm\frac{(1-m)(1-2m)\ldots\ldots(1-m(n-1)}{2.3.\ldots\ldots\ldots n}c^n\right)$$

prendendo nel *termine generale* il segno + se il numero n è pari, ed il — se n è dispari, allorché per altro il secondo termine del binomio si prenda negativo.

Si rifletta che facendo $X=a^m+b$, la quantità a è la potenza m.sima prossimamente minore di X, e che facendo $X=a^m-b$, è a la stessa potenza prossimamente maggiore di X. Adunque se la *formola* precedente si calcoli in ambedue i casi di $\pm b$, i resultamenti col segno + saranno minori, a quelli col segno — saranno maggiori di $\sqrt[m]{X}$: onde dalla loro differenza più o meno grande si conoscerà quanto ci siamo approssimati al vero valore di $\sqrt[m]{X}$.

Debbasi per esempio estrarre la radice *quinta* dal numero 6. La *quinta* potenza prossimamente

minore contenuta nel 6 è 1, 4, la prossimamente maggiore è 1, 5. Ma per trovare limiti della richiesta radice anche più vicini frà loro, cioè fino alla seconda decimale, si cangi il 6 in $6.10^{2.5}$; e si estragga la radice *quinta* dal num. 6,000000000; il che può farsi senza grande difficoltà con un metodo analogo a quello usato per l'estrazione della radice *quadra*, e *cuba*, che qui accennerò succintamente. Divise con virgola le cifre del numero a cinque a cinque da destra a sinistra si tolga dalle prime il numero $(1,4)^5 = 5,37824$, ed accanto all'avanzo 62176 si abbassino gli ultimi cinque *zeri*.

$$\begin{array}{r} 1,43 \\ \sqrt{6,00000,00000} \\ 5,37824 \\ \hline 621760000 \end{array}$$

Dipoi per 5 $(1,4)^4$ si divida il numero 621760, e si troverà il quoto 3, che sarà la seconda cifra decimale richiesta. Infatti formando la quinta *potenza* di 1,43 ottengo 5,9797108943 numero minore di 6, ed all'incontro $(1,44)^5 = 6,1917364224$ è maggiore. Presa la differenza 0,0202891057 del minore, e l'eccesso 0,1917364224 del maggiore sul numero 6, potrò formare le due seguenti equazioni;

$$\sqrt[5]{6} = 1,43\left(1 + \frac{0,0202891057}{5,9797108943}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\sqrt[5]{6} = 1,44\left(1 - \frac{0,1917364224}{6,1917364224}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Parragonando adesso le quantità letterali della *formola* di sopra coi numeri corrispondenti dell' esempio proposto, sarà $m = 5$, $a = 1,43$ $c = \frac{202891057}{5 \times 59797108943} = 0,0006786$; ovvero (preso il secondo termine del binomio col segno —) sarà $a = 1,4$; $c = \frac{1917364224}{5 \times 61917364224} = 0,006193$; e perciò;

$$\sqrt[5]{6} = 1,43(1,0006786 - 2(0,0006786)^2 + 6(0,0006786)^3 - 21(0,0006786)^4 + \text{ec.})$$

$$\sqrt[5]{6} = 1,44(0,993807 - 2(0,006193)^2 - 6(0,006193)^3 - 21(0,006193)^4 - \text{ec.})$$

Calcolati i termini della prima serie trovo;

$$\sqrt[5]{6} = 1,43 \times 1,00067768 = 1,430969082 4.$$

Calcolati i termini della seconda serie trovo con poca differenza;

$$\sqrt[5]{6} = 1,44 \times 0,9937288 = 1,430969472.$$

Siccome il calcolo di queste serie è assai prolisso, e d' altronde allorchè b è molto piccolo in confronto di a bastano pochi termini di quelle per una rapida approssimazione alla radice richiesta, si è immaginata la *formola* seguente, che abbrevia notabilmente il calcolo. Suppongo $a^m + b = (a + q)^m$, e che sia q una frazione così piccola da poterne trascurare il valore al di là della seconda potenza.

Avremo così; $a^m + b = a^m + mqa^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} q^2 a^{m-2}$

E quindi, $q = \dfrac{b}{m(a^{m-1} + \frac{m-1}{2} qa^{m-2})}$

Se prendessi $q' = \dfrac{b}{ma^{m-1}}$ avrei una prima approssimazione al valore di q. Per averne una seconda più esatta, che chiamo q'', pongo il valore di q' invece di q nel denominatore dell'equazione precedente ed ottengo

$$q'' = \frac{b}{m(a^{m-1} + \frac{(m-1)b}{2ma})} = \frac{2ab}{2ma^m + (m-1)b}$$

Perciò in generale

$$\sqrt[m]{(a^m \pm b)} = a \pm q'' = a\left(1 \pm \frac{2b}{2ma^m \pm (m-1)b}\right)$$

Formola assai commoda a calcolarsi, e che può facilmente estendersi alla potenza terza, quarta ec. di q quando occorra.

Applicando questa *formola* all'esempio precedente per la radice *quinta* di 6, sarà $m=5$, $a=1,43$, $a^5=5,9797108943$ $b=0,0202891057$. sarà quindi;

$$\sqrt[5]{6} = 1,43\left(1 + \frac{405782114}{5987826536 58}\right) = 1,43 \times 1,00067768 = 1,4309690824,$$

come si era già trovato.

115. Nella risoluzione delle equazioni di terzo grado è occorso pel *caso irriducibile* di estrarre la *radice cuba* dal binomio $P \pm \sqrt{-Q}$ (106), ed è stato preso un metodo particolare non troppo rigoro-

so. Adesso si può dimostrare esattamente la stessa estrazione per qualunque grado. Ciò dipende evidentemente dallo sviluppamento in serie della espressione $(a+b\sqrt{-1})^m \pm (a-b\sqrt{-1})^m$ qualunque sia l'esponente m.

Si osservi a tale uopo che chiamando i un numero qualunque della serie 0, 1, 2, 3, 4 ec., avremo in generale;

$$(\sqrt{-1})^{4i} = 1 \;,\; (\sqrt{-1})^{4i+1} = +\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^{4i+2} = -1,\; (\sqrt{-1})^{4i+3} = -\sqrt{-1}$$

E perchè dopo i numeri 0, 1, 2, 3, in cui $i=0$ non esiste alcun numero, che diviso per 4 non dia uno degli avanzi 0, 1, 2, 3, queste quattro formole contengono tutti i resultamenti possibili di tutte le potenze intiere, e positive di $\sqrt{-1}$.

Previa questa osservazione si cangi per maggiore semplicità $(a+b\sqrt{-1})^m$ in $a^m\left(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^m$, $(a-b\sqrt{-1})^m$ in $a^m\left(1-\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^m$, e si chiamino $C^{(2)}$, $C^{(3)}$ ec. i coefficienti numerici dei termini successivi dopo il secondo nello sviluppamento del binomio potenziato. Avremo;

$$a^m\left(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^m = a^m\left(1+\frac{mb}{a}\sqrt{-1}-C^{(2)}\frac{b^2}{a^2}-C^{(3)}\frac{b^3}{a^3}\sqrt{-1}\right.$$
$$\left.+C^{(4)}\frac{b^4}{a^4}+C^{(5)}\frac{b^5}{a^5}\sqrt{-1}-C^{(6)}\frac{b^6}{a^6}\text{ ec.}\right)$$

$$a^m\left(1-\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^m = a^m\left(1-\frac{mb}{a}\sqrt{-1}-C^{(2)}\frac{b^2}{a^2}+C^{(3)}\frac{b^3}{a^3}\sqrt{-1}\right.$$

$$+C\frac{b^{(4)\,4}}{a^4} - C\frac{b^{(5)\,5}}{a^5}\sqrt{-1} - C\frac{b^{(6)\,6}}{a^6} \text{ ec. })$$

Nelle serie del secondo membro di queste equazioni si faccia;

$$A = a^m\left(1 - C\frac{b^{(2)\,2}}{a^2} + C\frac{b^{(4)\,4}}{a^4} - C\frac{b^{(6)\,6}}{a^6} \text{ ec. }\right)$$

$$B = a^m\left(\frac{mb}{a} - C\frac{b^{(3)\,3}}{a^3} + C\frac{b^{(5)\,5}}{a^5} \text{ ec. }\right)$$

Ed avremo più semplicemente; $(a+b\sqrt{-1})^m = A + B\sqrt{-1}$, $(a-b\sqrt{-1})^m = A - B\sqrt{+}$ ed in conseguenza $(a+b\sqrt{+1})^m + (a-b\sqrt{-1})^m = 2A$ quantità *reale*, $(a+b\sqrt{-1})^m - (a-b\sqrt{-1})^m = 2B\sqrt{-1}$ quantità *immaginaria*.

Ma per rendere più convergente lo sviluppamento della quantità

$(a+b\sqrt{-1})^m \pm (a-b\sqrt{-1})^m$ si osservi che; $(a+b)^m$

$$= a^m\left(1 + \frac{mb}{a} + C\frac{b^{(2)\,2}}{a^2} + C\frac{b^{(3)\,3}}{a^3} + \text{ ec. }\right)$$

$$(a-b)^m = a^m\left(1 - \frac{mb}{a} + C\frac{b^{(2)\,2}}{a^2} - C\frac{b^{(3)\,3}}{a^3} + \text{ ec. }\right)$$

Onde sarà; $(a+b)^m + (a-b)^m = 2a^m\left(1 + C\frac{b^{(2)\,2}}{a^2}\right.$

$$+C^{(4)\,4}\frac{b}{a^4}+C^{(6)\,6}\frac{b}{a^6}+\text{ec.})$$

$$(a+b)^m-(a-b)^m=2a^m\left(\frac{mb}{a}+C^{(3)\,3}\frac{b}{a^3}+C^{(5)\,5}\frac{b}{a^5}+\text{ec.}\right)$$

Sommando le serie dello sviluppamento di $(a+b\sqrt{-1})^m+(a-b\sqrt{-1})^m$ coll'altra serie delle sviluppamento di $(a+b)^m+(a-b)^m$ si ottiene;

$$(a+b\sqrt{-1})^m+(a-b\sqrt{-1})^m=4a^m\left(1+C^{(4)\,4}\frac{b}{a^4}+C^{8\,8}\frac{b}{a^8}\right.$$

$$\left.+C^{(12)\,12}\frac{b}{a^{12}}+\text{ec.}\right)-(a+b)^m-(a-b)^m$$

Sottraendo dalla prima la seconda serie risulta;

$$(a+b\sqrt{-1})^m+(a-b\sqrt{-1})^m=(a+b)^m+(a-b)^m-4a^m$$

$$\left(C^{(2)\,2}\frac{b}{a^2}+C^{(6)\,6}\frac{b}{a^6}+C^{(10)\,10}\frac{b}{a^{10}}+\text{ec.}\right)$$

Le due serie del secondo membro di queste equazioni hanno, come vedesi, un andamento molto più rapido della precedente A, e perciò il calcolo di quelle resterà molto più spedito del calcolo di questa. Se poi l' esponente m è frazionario, e picciolissima la frazione $\frac{b}{a}$, l'approssimazione della radice m. si avrà con pochi termini, e dalla differenza dei resultati dell'una, e dell'altra serie, che

dovrebbero essere *identici*, si conoscerà il grado di approssimazione, a cui saremo giunti.

Se prendasi la differenza $\frac{(a+b\sqrt{-1})^m-(a-b\sqrt{-1})^m}{\sqrt{-1}}$, e vi si aggiunga, o se ne tolga lo sviluppamento di $(a+b)^m-(a-b)^m$, risulteranno le due equazioni qui appresso molto più commode al calcolo della serie B

$$\frac{(a+b\sqrt{-1})^m-(a-b\sqrt{-1})^m}{\sqrt{-1}}=4a^m\left(\frac{mb}{a}+C^{(5)5}\frac{b^5}{a^5}\right.$$

$$\left.+C^{(9)9}\frac{b^9}{a^9}\text{ ec.}\right)-(a+b)^m+(a-b)^m$$

$$\frac{(a+b\sqrt{-1})^m-(a-b\sqrt{-1})^m}{\sqrt{-1}}=4a^m\left(C^{(3)3}\frac{b^3}{a^3}+C^{(7)7}\frac{b^7}{a^7}\right.$$

$$\left.+C^{(11)11}\frac{b^{11}}{a^{11}}\text{ ec.}\right)+(a+b)^m-(a+b)^m$$

116. La formola del binomio potenziato, allorchè l'esponente m è numero intiero, e positivo, somministra ancora il mezzo di risolvere molte equazioni di qualunque grado col metodo già usato per le equazioni di terzo grado (103). Infatti nel caso di m intiero e positivo la formola ha eguali i coefficienti dei termini estremi, ed ha parimente eguali i successivi coefficienti numerici di tutti i termini egualmente distanti dagli estremi. Che però posto $x=(a+b)$, e riunendo in un solo termine quelli, che nello sviluppamento hanno lo stesso coefficiente, resulterà;

$$x^m = a^m + b^m + mab(a^{m-2} + b^{m-2}) + \frac{m.m-1}{2} a^2 b^2 (a^{m-4} + b^{m-4}) + \text{ec.}$$

Pongasi per brevità $a^m + b^m = T$, $ab = A$, e la precedente equazione diverrà;

$$x^m = T + mA(a^{m-2} + b^{m-2}) + \frac{m.m-1}{2} A^2 (a^{m-4} + b^{m-4})$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{2.3} A^3 (a^{m-6} + b^{m-6}) + \text{ec.}$$

Ma dalla stessa formola del binomio cangiata come sopra risulta;

$$mA(a^{m-2} + a^{m-2}) = mAx^{m-2} - m.m-2 A^2 (a^{m-4} + b^{m-4})$$

$$- \frac{m.m-2.m-3}{2} A^3 (a^{m-6} + b^{m-6}) - \text{ec.}$$

Dunque sostituendo nella precedente equazione questo valore, e riducendo i coefficienti dei termini omogenei, avremo;

$$x^m = T + mAx^{m-2} - \frac{m.m-3}{2} A^2 (a^{m-4} + b^{m-4}) - \frac{m.m-2.m-4}{3} A^3 (a^{m-6} + b^{m-6}) - \text{ec.}$$

E' parimente evidente che;

$$- \frac{m.m-3}{2} A^2 (a^{m-4} + b^{m-4}) = - \frac{m.m-3}{2} A^2 x^{m-4} +$$

$$\frac{m.m-3.m-4}{2} A^3 (a^{m-6} + b^{m-6}) + \text{ec.}$$

E sostituendo, e riducendo come sopra si otterrà;

$$x^m = T + mAx^{m-2} - \frac{m\,m-3}{2} A^2 x^{m-4} + \frac{m.m-4\,m-5}{2.3} A^3 (a^{m-6} + b^{m-6}) \text{ ec.}$$

Proseguendo lo stesso calcolo rispetto ad $A^3 (a^{m-6} + b^{m-6})$ ed ai termini successivi si troverà l'equazione finale;

$$x^m = T + mAx^{m-2} - \frac{m\,m-3}{2} A^2 x^{m-4} + \frac{m.m-4\,m-5}{2.3} A^3 x^{m-6} - \frac{m.m-5.m-6.m-7}{2.3.4} A^4 x^{m-8} + \text{ec.}$$

Allorchè m è numero dispari, l'ultimo termine del secondo membro di questa equazione sarà:

$$\pm \frac{m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-3}{2}.\frac{m-5}{2}\ldots 2.A^{\frac{m-1}{2}}}{2.3.4\ldots\frac{m-1}{2}} x = \pm mA^{\frac{m-1}{2}} x$$

Ed allorchè m è numero *pari* lo stesso ultimo termine sarà;

$$\mp \frac{m.\frac{m}{2}-1.\frac{m}{2}-2.\frac{m}{2}-3\ldots\ldots 1.A^{\frac{m}{2}}}{2.3.4\ldots\ldots\frac{m}{2}-1.\frac{m}{2}} = \mp 2A^{\frac{m}{2}}$$

Avremo adunque nel primo caso di m dispari l'equazione *ordinata*;

$$x^m - mAx^{m-2} + \frac{m.m-3}{2} A^2 x^{m-4} - \frac{m\,m-4\,m-5}{2.3} A^3 x^{m-6} \ldots$$

$$\ldots \pm mA^{\frac{m-1}{2}} x - T = 0$$

E nel caso di m pari, avremo;

$$x^m - mAx^{m-2} + \frac{m.m-3}{2} A^2 x^{m-4} - \frac{m.m-4.m-5}{2.3} A^3 x^{m-6} \ldots\ldots \pm 2A^{\frac{m}{2}} - T = 0$$

Pertanto se una qualunque *Proposta* avrà la forma delle due precedenti, è chiaro che una delle sue *radici* sarà $x = a + b$, e sarà $T = a^m + b^m$, $A = ab$. Quindi collo stesso calcolo fatto per le equazioni di terzo grado (103) si dedurrà;

$$x = \sqrt[m]{\left(\frac{T}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{T}{4} - A^m\right)}\right)} + \sqrt[m]{\left(\frac{T}{2} - \sqrt[2]{\left(\frac{T}{4} - A^m\right)}\right)}$$

Si prendano per esercizio a risolvere le equazioni.

$x^5 - 5x^3 + 5x - 3 = 0$, in cui $A = 1$, $T = 2$

$x^6 - 12x^4 + 36x^2 - 81 = 0$, in cui $A = 2$, $2A^3 + T = 81$, e perciò $T = 65$

Si troverà nella prima essere una delle sue radici $x = 2$, e nella seconda $x = 3$.

CAP. VIII.

Quantità esponenziali, e Logaritmi

117. La fatica del calcolo nella moltiplica, nella divisione, e molto più nella elevazione a potenza, e nella estrazione di radice, allorché i numeri sono

assai grandi, ha fatto pensare i Mattematici a trovare un metodo di abbreviare tutte queste operazion Si presentarono ben tosto alla riflessione loro le quantità *esponenziali*, in cui quando la medesima quantità è affetta da esponenti diversi, la moltiplica si eseguisce colla somma, la divisione colla sottrazione di tali esponenti (50, e 56); siccome ancora la quantità *esponenziale* si eleva a qualunque potenza m moltiplicando per m il suo esponente, e se ne estrae la radice m^{sima} dividendo per m l' esponente medesimo. (59)

Quindi è chè, qualora un numero qualunque y possa ridursi alla quantità *esponenziale* a^x composta di un numero fisso a, e di un esponente variabile x, e siasi in conseguenza formata una tavola, in cui si trovino calcolati gli esponenti x, x', x'' ec. corrispondenti ai numeri y, y', y'' ec, tutte le predette operazioni saranno notabilmente abbreviate. Abbiamo infatti $yy'y''=a^{x+x'+x''}$, $\frac{y}{y'}=a^{x-x'}$, $y^m=a^{mx}$, $\sqrt[m]{y}=a^{\frac{x}{m}}$, e simili risultamenti evidenti: dunque se nella Tavola opportunamente preparata saranno notati i numeri corrispondenti ad $a^{x+x'+x'}$, ed $a^{x-x'}$ ec. il prodotto $yy'y''$, il quoto $\frac{y}{x}$ ec. si otterranno colla massima prontezza, e facilità. Di più le equazioni *esponenziali* come $c^z=p$, la di cui incognita è l'esponente z, e che con le regole date finora sarebbero insolubili, riceveranno una facile soluzione

per mezzo della tavola medesima. Si trovi in questa il numero $c = a^{x}$, il numero $d = a^{x'}$; sostituendo le quantità *esponenziali* in luogo dei numeri, sarà $a^{xz} = a^{x'}$, e quindi $z = \frac{x'}{x}$.

Gli esponenti x, x' x'' ec che applicati ad un numero fisso a lo rendono eguale a tutti i numeri possibili y, y', y'' si chiamano i *logaritmi dei numeri*; ed il numero fisso a (il di cui *logaritmo* è *l'unità* perche il suo esponente tacito è 1) dicesi *la base delle tavole, ovvero del sistema dei logaritmi.* Se x è *logaritmo* di y, ciò si rappresenta scrivendo *log.* y invece di x, ovvero più semplicemente, scrivendo *l.* y. Questa ultima notazione sarà quella che adopreremo in appresso.

118. Qualunque sia il numero a preso per *base*, la serie delle sue potenze *intiere, e positive* $a^{0}, a^{1}, a^{2}, a^{3}$ ec. darà i *logaritmi* dei numeri corrispondenti a queste potenze, e la serie dell' *intiere negative* a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} darà i *logaritmi* delle corrispondenti frazioni. Perciò i numeri, e le frazioni intermedie fra le successive potenze della *base* a avranno per *logaritmo* un esponente intermedio frà 0, ± 1, ± 2, ± 3 ec.

Prendiamo per esempio la *base* 2 : la serie $2^{0}, 2^{1}, 2^{2}, 2^{3}$ ec. dà i numeri corrispondenti 1, 2, 4, 8 ec. i di cui respettivi *logaritmi* sono 0, 1, 2, 3. Così la serie $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}$ ec. forma le frazioni $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ ec, i di cui respettivi *logaritmi* sono $-1, -2, -3$ ec. In quanto al numero 3 interposto fra 2, e 4, ed i numeri 5, 6, 7 interposti frà 4, ed 8, il

primo avrà per *logaritmo* un numero medio fra gli esponenti 1, 2, ed i *logaritmi* degli altri saranno numeri intermedj frà gli esponenti 2, 3. Lo stesso dicasi dei *logaritmi* delle frazioni intermedie fra $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, e frà $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$. Quindi è che può conchiudersi in generale;

1° *Che i logaritmi sono composti di un numero intiero chiamato la Caratteristica, e di una frazione espressa per lo più in sette cifre decimali, che dicesi la Mantissa.*

2°. *Che allorquando la Mantissa è zero, il logaritmo appartiene ad un numero, che è potenza esatta della base.*

3° *Che essendo* $a = 1$, *qualunque sia la base* a, (58) *il logaritmo dell' unità è sempre zero in tutti i sistemi dei logaritmi.*

E' ben naturale, che essendo decimale la nostra Aritmetica, si debba prendere comunemente il numero 10 per *base; i logaritmi* calcolati su questa *base* si chiamano *logaritmi ordinari.* Riguardo ad essi la serie $10^0, 10^1, 10^2, 10^3$ ec fà vedere, che i *logaritmi* dei numeri compresi frà 1, e 10 hanno per *caratteristica zero*; quelli dei numeri compresi frà 10, e 100 hanno per *caratteristica* 1; quelli de numeri compresi frà 100, e 1000 hanno per *caratteristica* 2, e così di seguito. Dimodo chè se siano n le cifre del proposto numero, la *caratteristica* del suo *logaritmo ordinario* sarà $n-1$.

In quanto alle frazioni, che naturalmente hanno i loro *logaritmi ordinarj negativi* si usa trattarle coi *logaritmi positivi* mediante il seguente artifizio. Allorche la frazione qualunque $\frac{y}{y'}$ vuol ridursi a *decimale*, si moltiplica il numeratore y per

una potenza del 10, che pongo in generale 10^{x}; si effettua la divisione $y.10^{x}/y'$, e quindi si divide il *quoto* per 10^{x}. L'esponente x prendesi tanto maggiore quanto più grande e y' rispetto ad y: e quanto più vorremo spingere l'approssimazione del *decimale* al vero valore di y/y'. Con la scorta di questo principio si cangia pel nostro oggetto la proposta frazione y/y' in $y.10^{x}/y'$, e prendendone i *logaritmi ordinari* avremo $l(y.10^{x}/y')=x+l.y-ly'$ resultamento sempre *positivo* subito che può prendersi x a piacimento. Per lo più si suol prendere $x=10$, ma se fosse $y'>10$, ed y picciolissimo, si prenderà $x=10^{2}$, ovvero, $x=10^{3}$, ec.

La quantità $x+l.y-l.y'$ può calcolarsi in due maniere, cioè; Aggiungendo x alla *caratteristica* di $l.y$, e dipoi sottraendo $l.y'$ da questa somma; ovvero prendendo la differenza $x-ly'$, e sommandola con $l.y$. In quest' ultimo modo che è il più usato, la differenza $x-ly'$ dicesi il *complemento aritmetico* di $l.y'$.

Ottenuto nell'uno, o nell'altro modo il numero $x+ly-ly'$, esso esprimerà il *logaritmo* di $y.10^{x}/y'$, e perciò trovando nelle tavole il numero N cor-

rispondente a questo *logaritmo*, sarà $\frac{N}{10^x}$ il *decimale* a cui può ridursi la frazione $\frac{y}{y'}$. Si rende perciò manifesto che il numero $x+ly-ly'$ non esprime veramente il *logaritmo* della frazione $\frac{y}{y'}$, ma può prendersi come tale, sempre che si intenda chè il numero N corrispondente al *logaritmo* $x+ly-ly'$ contiene le x cifre decimali a cui può ridursi la frazione $\frac{y}{y'}$

Per dilucidare con qualchè esempio tutto questo discorso su i *logaritmi* delle frazioni, imprendo a calcolare $l.\frac{2}{3}$.

Nelle Tavole dei *logaritmi ordinari* trovo;

$$l\,2=0,3010300$$
$$l\,3=0,4771212$$

E siccome naturalmente $l.\frac{2}{3}=l.2-l\,3$, avremo

$$l.\frac{2}{3}=-0,1760912$$

A fine di verificare questo *logaritmo* negativo conviene che sussista l'equazione $10^{-0,1760912}=\frac{2}{3}$, cioè $\frac{1}{10^{0,1760912}}=\frac{2}{3}$. Prendo adunque dalle Tavole il numero corrispondente al *logaritmo positivo* 0, 1760812, e lo trovo essere 1, 5, ed infatti $\frac{1}{1,5}=\frac{2}{3}$.

Ma volendo dal *logaritmo* il rotto $\frac{2}{3}$ espresso in

decimali, come spesso torna assai commodo, converrebbe fare la fastidiosa divisione di $\frac{1}{1,5}$, il che si sfugge adoprando l'altro metodo dei *logaritmi positivi*, come appresso.

Pongasi $x = 10$, e sarà; $10 + l.2 = 10,3010200$

$$\frac{l.3 = 0,4771212}{10}$$

E sottraendo resterà $l\left(\frac{2.10}{3}\right) = 9,8239088$

O sivvero in altro modo. Prendasi $10 - l.3$, cioè il *complemento aritmetico* di $l.3$, che sarà

$$9,5228788$$

Si aggiunga $\frac{l.2 = 0,3010300}{10}$

Ed avremo come sopra $l\left(\frac{2.10}{3}\right) = 9,8239088$

Trovo adesso per mezzo delle Tavole che il numero corrispondente al *logaritmo* 9,8239088 è 666666 6666: divido questo numero per 10, cioè ne separo dieci cifre colla virgola, ed ottengo 0,6666 666666, che è precisamente il rotto decimale prossimo a $\frac{2}{3}$. E' visibile pertanto che il numero 9,8239088 può esprimere il *logaritmo* dalla frazione $\frac{2}{3}$, qualora però si sottintenda che il numero corrispondente a questo *logaritmo* dee dividersi per 10; o pure in altri termini, se le dieci cifre del numero corrispondente si intendano essere altrettante decimali in cui può essere ridotta la proposta frazione $\frac{2}{3}$.

119 Allorchè i *logaritmi* siano calcolati per una *base* qualunque e è facile ridurgli ad altri, che abbiano una diversa *base* a. Sia infatti il numero y che abbia x per *logaritmo* colla *base* e; e si dica x' il *logaritmo* incognito dello stesso numero colla *base* a. Avremo evidentemente $a^{x'} = e^{x}$, e quindi $x'la = xle$. Ma se e è la *base*, $le = 1$ (17) e perciò $x' = \frac{x}{l.a}$. Adunque per ottenere l' incognito *logaritmo* x' basterà moltiplicare il dato *logaritmo* x per la quantità costante $\frac{1}{la}$; ed è la quel *logaritmo* che trovasi calcolato colla *base* e rispetto al numero a. Questa quantità costante $\frac{1}{l.a}$ dicesi *modulo dei logaritmi*. Qualora però si voglia il *modulo* espresso da un *logaritmo* calcolato per la base a basterà riflettere che in questo caso è $La = 1$, e e perciò le (*logaritmo* del numero e nelle Tavole calcolate per la *base* a) sarà il *modulo* ricercato.

Sia per esempio il numero 81, il di cui *logaritmo ordinario* è 1,9084850, e vogliasi il logaritmo x' di questo istesso numero prendendo per *base* il 3. Avrò primieramente $10^{1,9084850} = 3^{x'}$; e perchè $l\,10 = 1$, sarà $x' = \frac{1,9084850}{l\,3}$. Preso il *logaritmo ordinario* di 3, sarà $x' = \frac{19084850}{4771212,5} = 4$; ed infatti $3^4 = 81$. Se poi si volesse il *modulo* $\frac{1}{l3}$ espresso per un *logaritmo* calcolato con la *base* 3, avremmo $l.3 = 1$, e perciò $x' = 1,9084850 l.10$, e

si troverà nelle tavole calcolate con la base 3, la quantità $l.10 = 2,0959032$, da cui proviene come sopra $x' = 4$.

120 Ma per trattare in tutta la sua estensione il metodo di formare le Tavole *logaritmiche*, che finqui si sono supposte già costituite, conviene risolvere generalmente l'equazione $y = a^x$ in due aspetti, cioè; *Trovare y conoscendo x, e trovare x conosceodo y*; o pure in altri termini; Dato il *logaritmo x trovare il numero corrispondente y, e dato questo numero trovare il suo logaritmo x colla data base a.* Occupiamoci del primo problema, che consiste nel determinare il valore di y per mezzo dell' *indeterminata* x e della *costante* a nella *proposta* $y = a^x$.

Ponendo $a = 1 + b$ lo sviluppo della potenza a^x secondo la *formola del binomio* dà (111),

$$y = 1 + bx + \frac{x.x-1}{2} b^2 + \frac{x.x-1.x-2}{2.3} b^3 + \text{ec.}$$

E poiche qui si vuole la serie del secondo membro ordinata per le potenze di x, è facile vedere che riunendo nello stesso termine i particolari coefficienti di x, di x^2, x^3 ec, la serie richiesta avrà la forma seguente;

$$y = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ec},$$

nella quale i coefficienti A, B, C, D ec da determinarsi saranno tutti funzioni di b, cioé di $a - 1$. Se in luogo di x si ponga $x + i$; e facciasi in conseguenza $y' = a^{x+i}$, avremo;

$$y' = 1 + A(x+i) + B(x+i)^2 + C(x+i)^3 + D(x+i)^4 + \text{ec}$$

Adunque sottraendo da questa la precedente equazione, e dividendo per i, sarà;

$$(1)\quad \frac{y'-y}{i} = A + B(2x+i) + C(3x^2 + 3xi + i^2) + D(4x^3 + 6x^2 i + 4xi^2 + i^3) + \text{ec.}$$

Ma d' altronde $y' - y = \frac{a^{x+i} - a^x}{i} = a^x \frac{(a^i - 1)}{i}$; e posto $(1+b)$ in luogo di a, e sviluppando il binomio, avremo;

$$(2)\quad \frac{y'-y}{i} = a^x \left(b + \frac{i-1}{2} b^2 + \frac{(i-1)(i-2)}{2\,3} b^3 + \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{2\,3.4} b^4 + \text{ec.}\right)$$

Le equazioni (1), (2) debbono sussistere qualunque sia il valore di i, e perciò anche quando $i=0$, ed in conseguenza $y'=y$. In questo caso le serie dei secondi membri formeranno la nuova equazione;

$$a^x \left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{ec}\right) = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{ec}$$

Facendo $h = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4}$ ec., e sostituendo ad $a^x = y$, la serie da cui ci siamo partiti, sarà;

$$h(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{ec,}) = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{ec.}$$

Ora non essendovi qui altra quantità *indeterminata*

che la x, non può sussistere questa equazione se parzialmente non si eguagliano tutti i termini in cui x è elevata alla medesima potenza. Avremo pertanto $A=h$, $B=\frac{Ah}{2}=\frac{h^2}{2}$, $C=\frac{Bh}{3}=\frac{h^3}{2.3}$ $D=\frac{Ch}{4}=\frac{h^4}{2.3.4}$ ec.

Quindi è che; $y=a^x=1+hx+\frac{h^2}{2}x^2+\frac{h^3}{2.3}x^3+\frac{h^4}{2.3.4}x^4+ec.$

Per determinare nel modo il più semplice le quantità h, suppongo che esista una *base* e tale, che sia $e^h=a$, e quindi deduco $h=la$, logaritmo calcolato per la *base* e per ora incognita. Adunque l' equazione $y=a^x$ risoluta nei suoi più precisi termini sarà; $y=1+xl.a+\frac{x^2(la)^2}{2}+\frac{x^3(la)^3}{2.3}+\frac{x^4(l.a)^4}{2.3.4}+ec.$

Determiniamo adesso il valore della *base* e; perlochè pongasi e in luogo di a nella precedente equazione. Essa diverrà;

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+ec.$$

E fatto $x=1$, sarà; $e=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+ec.$

2, 7182818 arrestandosi alla settima *decimale*, Questa *base* che si offre naturalmente nella risoluzione del *proposto problema* serve a quei logaritmi, che si chiamano *naturali*, ed anche *iperbolici*, perchè sono rappresentati per mezzo dell' area dell' iperbola equilatera frà gli asintoti.

Rammentandosi di ciò che poco innanzi abbiamo detto del *modulo dei logaritmi*, la sua espressione generale $\frac{1}{l.a}$ (in cui $l.\ a$ è calcolato colla base e diversa da a) può cangiarsi per la massima semplicità in $\frac{1}{l\,e.}=1$. Tale è il *modulo* adottato pe' *logaritmi naturali*, cioè l'*unità*. Volendo altresì il *modulo* pei *logaritmi ordinari* riprendo l'equazione;

$$h=la=a-1+\frac{(a-1)^2}{2}-\frac{(a-1)^3}{3}+\frac{(a-1)^4}{4}+\text{ec.}$$

e fatto $a=10$, avremo; $l.10=9-\frac{9^2}{2}+\frac{9^3}{3}-\frac{9^4}{4}+\text{ec.}$

Ma essendo questa serie molto *divergente* si adopra il seguente artifizio per renderla *convergente*. Facciasi $10=\frac{1+x}{1-x}$; sarà $x=\frac{9}{11}$, e quindi;

$$10=\frac{1+\frac{9}{11}}{1-\frac{9}{11}}$$

Prendendo i *logaritmi* di questa ultima equazione si ottiene; $l.10=l.(1+\frac{9}{11})-l.(1-\frac{9}{11})$

Risolvendo $l.(1+\frac{9}{11})$ ed $l.(1-\frac{9}{11})$ nel modo istesso della serie $l.a=a-1-\frac{(a-1)^2}{2}+\text{ec.}$ avremo;

$$l.10=2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3.11^3}+\frac{9^5}{5.11^5}+\frac{9^7}{7.11^7}+\text{ec.}\right)=2,3025851,$$

e tale sarà il *logaritmo naturale* del numero 10, da cui si ricava il *modulo* dei *logaritmi ordinari* $\frac{1}{l.10} = 0,4342945$.

Adunque per passare dai *logaritmi naturali* agli *ordinari* conviene moltiplicare i primi pel *modulo* 0, 4342945: ed al contrario per passare dagli *ordinari* ai *naturali* conviene moltiplicare i primi per 2, 3025851, o sivvero (il che ritorna lo stesso) dividere i primi per 0, 4342945.

Il secondo Problema, cioè; *Dato un numero y trovare il suo logaritmo x colla data base a*, riceve una facile soluzione dalle cose spiegate qui sopra riguardo al primo.

Presa infatti la *base e* dei *logaritmi naturali* potrà supporsi $y = e^{x'}$, ed insieme $y = a^{x}$. La prima di queste equazioni confrontata colla superiore $e = a^{h}$, darà $x' = l\,y = y - 1 - \frac{(y-1)^2}{3} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \text{ec.}$ la qual serie esprime il *logaritmo naturale* di y.

La seconda equazione $y = a^{x}$ dà $x = \frac{l\,y}{l.a}$, e ponendo la precedente serie in luogo di $l.y$, avremo generalmente

$$x = \frac{1}{l.a}\left(y - 1 - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \text{ec}\right)$$

La quale equazione ci dice che il *logaritmo* di y per la *base* qualunque a risulta dal prodotto del *modulo* $\frac{1}{l.a}$ pel *logaritmo naturale* dello stesso nu-

mero y; come già si poteva immediatamente dedurre dall' ultima conclusione esposta sul passaggio dai *logaritmi naturali* agli *Ordinarj*.
La serie che esprime il valore di x, cioè di Ly ha il difetto di essere *divergente* a misura che sarà $y > 1$. Non mancano metodi per renderla più o meno *convergente*, e questi si trovano ampiamente spiegati nelle istruzioni pratiche, che i buoni Autori sogliono premettere alle loro *Tavole logaritmiche*, che già si suppongono tra le mani degli studiosi tosto chè si applicano all' esposta Teorica dei *logaritmi*. Nelle mentovate istruzioni si possono inoltre apprendere molte altre cose, che qui per brevità si tralasciano, necessarie pell' uso, e pel maneggio delle *Tavole medesime*.

121. Si osservò in principio (117) che le equazioni *esponenziali* sarebbero insolubili senza il soccorso dei *logaritmi*, dai quali ricevono una facile soluzione. Questa si estende ancora a molti problemi, fra i quali i più comuni sono quelli che riguardano il danaro dato (come dicono) a *frutto composto*, cioè quando il *frutto semplice annuale* si cumula col *capitale fruttifero*. Prendiamo a risolvere due Problemi di tal fatta.

Problema 1º Tizio dà scudi 3500 al *frutto composto* del 5 per cento, ed anno, e non vuol ritirare alcuna somma finchè il *Capitale* non sia triplicato. Si domanda dopo quanti anni avverrà la sua riscossione.

Sia t il numero degli anni necessari acciò il *Capitale* di scudi 3500, che chiamo a divenga $3a$.
Il *Capitale* a al termine del primo anno unito al frutto del 5 per 100 diviene $a + \frac{a}{20}$, ovvero $\frac{21a}{20}$:

al fine del secondo anno questa somma $\frac{21a}{20}$ unita al suo frutto $\frac{21a}{20^2}$ diverrà $a\left(\frac{21}{20^2}\right)^2$, e così di seguito per anni t diverrà $a\left(\frac{21}{20^2}\right)^t$. Avremo adunque l'equazione $a\left(\frac{21}{20^t}\right)^t = 3a$, ovvero $\left(\frac{21}{20^t}\right)^t = 3$.

Presi i *logaritmi* sarà $t(l.21 - l.20) = l.3$, e quindi $t = \frac{l.3}{l.21 - l.20} = \frac{4771213}{211893}$; e presi nuovamente i *logaritmi* si troverà $l\,t = 1,3535120$, d'onde risulta $t = 22,569$.

E' da riflettersi però che il tempo corrispondente alla frazione 0, 569 non può essere esatto secondo la comune maniera di intendere il contratto del *frutto composto*. Infatti si giunge all' equazione $a\left(\frac{21}{20^t}\right)^t = 3a$ intendendo che il *capitale* $a\left(\frac{21}{20^{t-1}}\right)^{t-1}$ dell' anno precedente frutti per l'intiero anno successivo, e perciò vi si aggiunge $\frac{a}{20}\left(\frac{21}{20^{t-1}}\right)^{t-1}$, cioè $\frac{a\,21^{t-1}}{20^t}$.

Proseguendo il calcolo in questo modo è evidente che t dovrà esser sempre un numero intiero: che se vogliasi calcolare il *frutto* di una frazione x dell' anno dopo un numero intiero t di anni precedenti, allora al capitale $a\left(\frac{21}{20}\right)^t$ si dovrà aggiungere $\frac{ax}{20}\left(\frac{21}{20^t}\right)^t$.

e quindi l' equazione del problema diventerà in questo caso $a\left(\frac{21}{20}\right)^{t}\left(1+\frac{x}{20}\right)=3a$, e non già $a\left(\frac{21}{20}\right)^{t+x}=3a$, come suppone il resultamento ottenuto 22,569. Da tutto ciò si dee conchiudere, che per rettificare questo risultamento conviene porre il numero intiero 22 invece di t nella equazione rettificata $\left(\frac{21}{20}\right)^{t}\left(1+\frac{x}{20}\right)=3$, e da questa dedurre la vera frazione $x=0,510988$, cioè mesi 6, e giorni 4 in circa. Di modoche per triplicare il *capitale* di scudi 3500 al *frutto composto* del 5 per 100 vi occorre il tempo di Anni 22, mesi 6, e giorni 4 prossimamente.

Problema 2°. Un pupillo ha una rendita annua di scudi 500; vive con 300, ed i residui scudi 200 gli impiega ogni anno al *frutto composto* del 5 per 100 finchè il suo *capitale* non ammonti a scudi 10000, Quanti anni dovrà durare questo impiego?

Facendo $200=a$, e chiamando t il tempo che occorre per la soluzione del problema abbiamo precedentemente veduta che a questo *frutto* il *capitale* a diventa $a\left(\frac{21}{20}\right)^{t}$. La stessa somma a impiegata al fine del primo Anno fruttando un anno dimeno diverrà $a\left(\frac{21}{20}\right)^{t-1}$, ed argomentando similmente per ciò che diviene la somma a impiegata successivamente nel terzo anno nel quarto ec, ne risulterà l' equazione;

$$a\left(\left(\frac{21}{20}\right)^{t}+\left(\frac{21}{20}\right)^{t-1}+\left(\frac{21}{20}\right)^{t-2}\ldots\ldots+\frac{21}{20}\right)=50a$$

E tolto il comune moltiplicatore a, resta;

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{t}+\left(\frac{21}{20}\right)^{t-1}+\left(\frac{21}{20}\right)^{t-2}\ldots\ldots+\frac{21}{20}=50$$

La serie, che forma il primo membro è tale, che moltiplicando per $\frac{21}{20}$ tutti i termini meno il primo, si hanno precisamente tutti i termini meno l'ultimo. Adunque poichè 50 è la somma di tutti i termini della serie, resulta l'equazione;

$$\frac{21}{20}\left(50-\left(\frac{21}{20}\right)^{t}\right)=50-\frac{21}{20}, \text{ e quindi } \left(\frac{21}{20}\right)^{t+1}=\frac{71}{20}$$

Presi i *logaritmi* di questa ultima, si avrà;

$$t=\frac{l.71-l.21}{l.21-l.20}=\frac{5290390}{211893}=24,96 \text{ in circa.}$$

Considerando poi che la frazione 0, 96 non può essere esatta per le cose dette nel precedente problema, si ponga il numero intiero 24 invece di t, ed $s+21$ invece di 71 nell'equazione originaria

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{t+1}=\frac{71}{20}, \text{ e ne dedurremo } s=20\left(\frac{21}{20}\right)^{25}-21=46,7271.$$

Adunque il capitale a, impiegato secondo le condizioni del Problema per 24 anni intieri monterebbe alla somma di 46, 7271 a. Per calcolare in seguito qual frazione x del successivo anno 26 mo è necessaria perchè 46,7271a coll'aumento di scudi a, e col *frutto* del 5 per 100 giunga a 50a, si faccia come sopra; $(47,6271)\left(1+\frac{x}{20}\right)=50$, e tro-

veremo $x=0,95246$, cioè Mesi 11, e giorni 13 circa. Dimodochè la somma annua di scudi 200. impiegata a forma del Problema diverrà scudi 10000 dopo Anni 24, Mesi 11, e giorni 13. prossimamente.

CAP. IX.

Alcuni Teoremi, e Problemi Aritmetici

122. Teorema 1mo. Se p è numero assolutamente *primo*, e non *submultiplo* della somma dei numeri $a+b+c+$ec, la differenza dei numeri $(a+b+c$ ec.$)^p$ $-(a^d+b^p+c^p+$ ec.$)$ sarà multipla di p.

Infatti questa differenza è (111, 112); pa^{p-1} $(b+c+$ec$)$ $+\frac{p\,p-1}{2}a^{p-2}(b+c+$ec.$)^2$ $+\frac{p.p-1.p-2}{2.3}$ $a^{p-3}(b-c+$ec.$)^3$ $+$ ec, in cui tutti i termini sono moltiplicati per p, e niuno dei divisori 2, 3, 4 ec. sarà *submultiplo* dello stesso p, che per ipotesi è numero *primo*. Adunque la proposta differenza è multipla di p. Il chè ec.

123. Si deduce dal presente Teorema, che se tutti i numeri a, b, c, d, ec. sono eguali all' unità, e sia la loro somma $1+1+1+1+$ ec $=A$ numero *primo* con p, avremo la differenza A^p-A multipla di p, e sarà in conseguenza $A^{p-1}-1$ un numero multiplo di p. Questo teorema che è un

caso particolare del precedente ci sarà molto utile per le dimostrazioni che seguono.

Si osservi che posto $p = 2n+1$, abbiamo $A^{p-1} - 1 = (A^n + 1)(A^n - 1)$. Adunque uno dei due fattori $A^n + 1$, $A^n - 1$ deve essere multiplo di p.

124. Teor. 2do. Essendo p numero *primo*, e non *submultiplo* dei numeri cogniti q, r, il trinomio $x^2 + qy^2 + r$ può sempre dsterminarsi rapporto ad x, y in modo, che sia multiplo di p.

Possono occorrere generalmente due casi. 1mo Che y^2 sia determinabile in modo da rendere $qy^2 + r = pi$ (posto i un numero intiero qualunque)

2do. Che y^2 non sia determinabile con questa condizione.

Nel primo caso fatto $x = mp$, il trinomio $x^2 + qy^2 + r$ diviene tosto *multiplo di p*.

Nel 2do. Caso facciasi $2a+1 = p$, $qy^2 + r = \pm V$. e per maggiore semplicità prendasi $-V$, poichè il calcolo riuscirebbe lo stesso nel caso di $+V$.

Così il proposto trinomio diventa $x^2 - V$, da cui si deduce;

$$\frac{x^{2a} - V^a}{x^2 - V} = x^{2a-2} + Vx^{2a-4} + V^2 x^{2a-6} \ldots + V^{a-1}$$

Posto P eguale al secondo membro di questa equazione, avremo;

$$P(x^2 - V) = x^{2a} - V^a = x^{2a-1} - (V^a - 1)$$

Sia $Q=V^{a}+1$, e moltiplicando per Q la precedente si otterrà;

$$PQ(x^{2}-V)=Q(x^{2a}-1)-(V^{2a}-1)=Q(x^{p-1}-1)$$
$$-(V^{p-1}-1)$$

Ma pel teorema precedente (123) abbiamo $x^{p-1}-1$, $V^{p-1}-1$ *multipli* di p, perchè V è per ipotesi *primo con* p, ed x può prendersi eguale ad uno dei numeri $1, 2, 3 \ldots p-1$ tutti *primi* con p. Quindi è che qualora sia possibile determinare P, Q *primi* con p, la quantità $x^{2}-V$, che è il proposto trinomio, dovrà essere necessariamente *multipla* di p, come si richiede.

Per sodisfare alla condizione di rendere P *primo* con p considero che nella equazione

$$x^{2a-2}+Vx^{2a-4}+V^{2}x^{2a-6}\ldots\ldots+V^{a-1}-P=0 \quad (1)$$

i valori della x di primo grado, ed in numeri intieri non possono esser più che $2a-2=p-3$, qualunque sieno le quantità V P. Perciò nell' ipotesi di $P=pi$ vi saranno almeno due numeri nella serie $1, 2, 3 \ldots\ldots p-1$ non atti a risolvere l' equazione (1), e questi saranno appunto due valori di x risolventi la stessa equazione con P non *multiplo* di p, cioè diverso da pi.

Rispetto a Q da rendersi *primo* con p considero l' equazione seguente;

$$Q=V^{a}+1=(qy^{2}+r)^{a}+1=(qy^{2a})+ar(qy^{2a-1})\ldots$$
$$+r^{a}+1 \quad (2)$$

Fatto in questa $y=0$, resta $Q=r^{a}+1$. Per lo che

se r^a+1 non è *multiplo di p*, conforme può esserlo (122. Osserv.), potrà prendersi $V=r$; $Q=r^a+1$, quantità ambedue *prime* con p.

Ma qualora r^a+1 sia *multiplo* di p, suppongo tale ancora Q, ed in conseguenza $r^a+1-Q=pi$. Riduco a *zero* l'equazione (2), e dividendola per y fattore comune dei precedenti, ed inconseguenza anche dell'ultimo termine pi (99), osservo che deve essere $\frac{i}{y^2}=i'$ numero intiero; e l'equazione istessa con Q *multiplo* di p diverrà;

$$q^a y^{2a-2} + arq^a y^{2a-4} \ldots + aqr^{a-1} + pi'=0$$

Anche in questa, come nell'equazione (1) i valori y intieri e di primo grado atti a risolverla non possono essere più che $2a-2=p-3$. Laonde presi i non risolventi due valori, ambedue risolveranno la precedente con Q non multiplo di p, come si vuole per la completa dimostrazione del Teorema.

125. Teor. 3zo. Il prodotto di un qualunque numero di *fattori*, ciascuno dei quali sia la somma di quattro quadrati, forma sempre la somma di quattro quadrati.

Sieno primieramente i due *fattori* $(a^2+b^2+c^2+d^2)$ $(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)$. Scrivo il prodotto in quattro colonne ponendo in ciascuna quattro quadrati formati da lettere diverse, cioè;

$a^2\ a'^2$	$a^2\ b'^2$	$a^2\ c'^2$	$a^2\ d'^2$
$b^2\ b'^2$	$a'^2\ b^2$	$a'^2\ c^2$	$a'^2\ d^2$
(1) $c^2\ c'^2$	(2) $c^2\ d'^2$	(3) $b^2\ d'^2$	(4) $c'^2\ b^2$
$d^2\ d'^2$	$c'^2\ d^2$	$b'^2\ d^2$	$b'^2\ c^2$

Considerando adesso le *radici* dei quadrati di ciascuna colonna, è ben facile comprendere che;

$$(1)=(aa'+bb'+cc'+dd')^2 - 2aa'bb' - 2aa'cc' - 2aa'dd' - 2bb'cc' - 2bb'dd' - 2cc'dd'$$

$$(2)=(ab'-a'b+cd'-c'd)^2 + 2aa'bb' - 2acb'd' + 2adb'c' + 2bca'd' - 2bda'c' + 2cc'dd'$$

$$(3)=(ac'-a'c+b'd-bd')^2 + 2aa'cc' - 2adb'd' + 2abc'd' - 2caa'b' - 2bca'd' + 2bb'dd'$$

$$(4)=(ad'-a'd+bc'-b'c)^2 + 2aa'dd' - 2abc'd' + 2acb'd' + 2bda'c' - 2cda'b' + 2bb'cc'$$

E sommando (1)+(2)+(3)+(4) avremo il prodotto dei due proposti *fattori* eguale ai quattro quadrati.

$$(5)\quad \begin{aligned} &(aa'+bb'+cc'+dd')^2 \\ &+(ab'-a'b+cd'-c'd)^2 \\ &+(ac'-a'c+b'd-bd')^2 \\ &+(ad'-a'd+bc'-b'c)^2 \end{aligned}$$

Indicati questi quadrati con $a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^3$, è evidente che moltiplicandoli per altro simile *fattore* $a'''^2 + b'''^2 + c'''^2 + d'''^2$ il prodotto sarà della forma $a''''^2 + b''''^2 + c''''^2 + d''''^2$ Dimodochè così proseguendo con qualsivoglia numero di *fattori* simili, il prodottofinale manterrà sempre la stessa forma, cioè la somma di quattro quadrati. Il che ec.

E' da osservarsi che se uno, o più *fattori* comprendano meno di quattro quadrati il prodotto rimarrà sempre di quattro quadrati. Infatti ponendo per esempio c' d' eguali ambedue a *zero*, i quattro quadrati (5) diventano

$$(aa'+bb')^2+(ab'-a'b)^2\ (+b'd-a'c)^2+(-a'd-b'c)^2$$

126. Teor. 4to. Qualunque numero intiero, e *positivo* o è un quadrato, o sivvero la somma di due, di tre, o di quattro quadrati al più.

Sieno a, b, c, d ec. i *fattori primi* di un qualunque numero N intiero, sarà $N = a^x\ b^y . c^z . d^u$ ec. Pertanto qualora si dimostri il presente Teorema per qualunque numero *primo*, avremo pel Teor. precedente il prodotto $a^x . b^y . c^z . d^u$ ec. ed in conseguenza qualunque numero N, eguale alla somma di quattro quadrati al più.

Sia adunque p un qualunque numero *primo*. Estratta da p la radice quadra a, e dall' avanzo, se vi è, la radice b può restare un ultimo avanzo r quadrato, o non quadrato. In caso che r non sia quadrato si prenda l' equazione in quantità note

$$a^2 + b^2 + r = p$$

A norma del Teor. 2do, potremo sempre determinare l'altra equazione

$$e^2 + d^2 - r = pi$$

Adunque sommando sarà (1) $a^2 + b^2 + e^2 + d^2 = pp'$ in cui $p' = i + 1$ numero intiero positivo.

Essendo p' *submultiplo* del quadrinomio $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, sarà anche *submultipla* di p' la quantità

$$(a - xp')^2 + (b - yp')^2 + (c - zp')^2 + (d - up')^2$$

Si determinino x, y, z, u in guisa che niuno di questi binomj sia $> \frac{1}{2} p'$, e si ponga

$$(2)\ p'p'' = (a - xp')^2 + (b - yp')^2 + (c - zp')^2 + (d - up')^2$$

Avremo $p'p'' < p'^2$, ovvero $p'' < p'$ ambedue numeri intieri positivi.

Ma moltiplicando l'equazione (1) per la (2) avremo il prodotto $pp'^2 p''$ eguale alla somma di quattro quadrati, ognuno *multiplo* di p'^2, come apparisce dal Teor. 3zo. considerando ivi la forma dei quadrati (5). Perciò dividendo per p'^2 questo prodotto resterà ancora pp'' eguale alla somma di quattro quadrati al più.

Qualora sia $p'' > 1$ si prosegua lo stesso calcolo con $p''' < p''$, poi con $p'''' < p'''$ ec. finchè non giungasi ad un $p^{(m)} = 1$; risultamento che dee necessariamente avvenire, perchè p', p'', p''' ..... $p^{(m)}$ sono numeri intieri continuamente decrescenti, e positivi.

(m)

Avremo adunque in ultimo pp, vale a dire p, eguale alla somma di quattro quadrati al più. il che ec.

Applichiamo al fatto il numero *primo* 317. Coll' estrazione della radice quadra trovo senza difficoltà,

$$17^2+5^2+3=317$$

Suppongo inoltre $x^2+y^2-3=317i$

E ripigliando le notazioni del Teor. 2do. cioè $a=158$, $V=y^2-3$, $Q=(y^2-3)^{158}+1$, calcolo se fatto $y=0$, resti $Q=3^{158}+1$ non *multiplo* di 317.

Invece di 3^{158} prendo $(3^{10})^{15}\times 3^8$, e dividendo per 317 i numeri 3^{10}, 3^8 ne deduco;

$$Q=(187\times 317+87)^{15}(317\times 20+221)+1$$

Se Q è *multiplo* di 317, dovrà esserlo ancora il numero

$$221^{15}\times 87+1=221^3(4984209207)^3+1$$

Pongo $15723057\times 317+138$ in luogo di 4984209207, e torno a riflettere che se Q è multiplo di 317, deve esserlo pure il numero $221^3\times 138+1$, $=5808039113$, ed infatti è questo numero eguale a 317×18321189.

Conchiudo pertanto che non può farsi $y=0$ per ottenere Q non *multiplo* di 317; e perciò preso $y=3$ trovo con un calcolo analogo al precedente $Q=6^{158}+2$ non *multiplo* di 317. In seguito risolvo l' equazione $x^2+6=317i$ prendendo per x^2 uno

dei numeri $1^2, 2^2, 3^2 \ldots 316^2$, e per i uno dei numeri $1^2, 2^2, 3^2 \ldots 316^2$. Trovo così $59^2 = 317 \times 11 - 6$, cioè $x = 59$, $i = 11$.

Ripiglio adesso l'equazioni $17^2 + 5^2 + 3^2 = 317$

$$59^2 + 3^2 - 3^2 = 317 \times 11$$

E sommando ottengo (1) $59^2 + 17^2 + 5^2 + 3^2 = 317 \times 12$. Siccome 59, e 17 sono ambedue maggiori di $\frac{12}{2}$ faccio

$$12p'' = (59 - 12x')^2 + (17 - 12y')^2 + 5^2 + 3^2;$$

e prendendo $x' = 5$, $y' = 1$ ottengo,

(2) $12p'' = (-1)^2 + 5^2 + 5^2 + 3^2$; e quindi $p'' = 5$

Moltiplico l'equazione (1) per la (2) a norma del Teorema 3^{zo}., e dividendo il prodotto per 12^2, trovo

$$(3)\ 28^2 + 26^2 + 10^2 + 5^2 = 317 \times 5$$

Siccome $5 > 1$, e le radici 28, -26, -10, 5 (così date dal calcolo precedente) sono tutte $> \frac{5}{2}$ astraendo dal segno, faccio

$$5p''' = (28 - 5x'')^2 + (-26 + 5y'')^2 + (-10 + 5z'')^2 + (5 - 5u'')^2.$$

E prendendo $x'' = 6, y'' = 5, z'' = 2, u'' = 1$, ottengo;

$$(4)\ 5p''' = (-2)^2 + (-1)^2, \text{ e qoindi } p''' = 1.$$

Moltiplico come sopra l'equazione (3) per la (4), divido il prodotto per 5^2, ed ottengo infine,

$$317 = 16^2 + 6^2 + 5^2$$

Si osservi 1mo. Che simili problemi dipendenti da equazioni *indeterminate* di secondo *grado* a due incognite determinabili in più modi, possono avere diverse soluzioni. Infatti colla teorica di quelle equazioni, che sarà esposta a suo luogo, si troverebbe non solo $317 = 16^2 + 6^2 + 5^2$, ma ancora

$$317 = 14^2 + 11^2$$
$$= 13^2 + 12^2 + 2^2$$
$$= 14^2 + 9^2 + 6^2 + 2^2$$

Si osservi 2do. Che l' applicare la dimostrazione del proposto Teorema a decomporre in quadrati un numero *primo* di molte cifre, e tanto più un numero qualunque assai grande, esige un calcolo prolisso, laborioso, e quasi impraticabile Il problema che segue suppone già dimostrato questo teorema, e presenta un metodo facilissimo in pratica per decomporre in tutti i modi possibili un qualunque numero in quadrati.

127. Problema 1mo. Decomporre qualsivoglia numero intiero, e positivo in quattro quadrati al più.

Divido il dato numero per 8, e chiamando n il quoto, lo riduco ad una di queste forme; $8n$, $8n+1$, $8n+2$ . . . . . $8n+7$. E poiché qualsivoglia numero può sempre ridursi alla somma di quattro quadrati al più (126), i numeri della forma $8n$ potranno decomporsi nei quadrati *pari* $(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2 + (2u)^2$, nei quali $n = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + u^2}{2}$

Così i numeri della forma $8n+1$ potranno decomporsi in un quadrato *dispari*; ed uno, due, o al più tre quadrati *pari* nei quali $n = \frac{x(x+1)+y^2+z^2+u^2}{2}$

Continuando lo stesso ragionamento è visibile; Che i numeri della forma $8n+2$ conterranno due quadrati *dispari*, ed uno, o al più due *pari*.

I numeri della forma $8n+3$ tre quadrati *dispari*, ed al più uno *pari*.

Quelli della forma $8n+4$ il quadrato 4, e tre al più quadrati *pari*; ovvero quattro quadrati *dispari*.

Quelli della forma $8n+5$ un *dispari*; ed uno, due, o al piu tre quadrati *pari*.

Quelli della forma $8n+6$ due *dispari*, ed uno, o due quadrati *pari*.

Infine i numeri della forma $8n+7$ dovranno contenere tre quadrati *dispari*, ed uno *pari*.

Pertanto, dopo aver ridotto il numero dato ad una delle forme $8n+r$ (in cui il residuo r può variare da *zero* a 7), sarà noto quanti quadrati *dispari*, e quanti *pari* contiene. A norma di ciò, o coll' estrazione della radice quadra; o sivvero più comodamente colla tavola dei quadrati dei numeri sufficientemente estesa; sottraggo dal dato numero il massimo quadrato *pari*, o *dispari* che contiene. Mi è noto ancora quale specie di quadrati dee essere nell' avanzo ottenuto; e perciò ne sottraggo il massimo quadrato *pari* o *dispari* contenuto in quello, e seguito così finchè il terzo, o quarto avanzo sia un quadrato.

Qualora col prendere continuamente i quadrati massimi non si abbia l' ultimo avanzo quadrato, si prenderanno l' uno dopo l' altro i quadrati inferiori di quella specie che conviene loro, e per dimi-

nuire i tentativi gioverà moltissimo rammentarsi che i quadrati *dispari* terminano colle cifre 1, 5, 9; quelli pari con 00, 4, 6. Laonde dall'ultima cifra degli avanzi successivi si argomenterà facilmente quali serie di quadrati si debbano sottrarre per ottenere un residuo quadrato.

Ripetuto questo scandaglio quante volte è possibile, ed incominciatelo gradatamente dal quadrato prossimo inferiore al massimo dei già trovati si avrà la richiesta decomposizione in tutti i modi possibili.

Sia proposto per esempio il numero $770=8\times 96+2$. Esso dee contenere due quadrati *dispari*, ed uno, o al più due quadrati *pari*.

Il massimo quadrato *dispari* contenuto in 770 è $27^2=729$, l'avanzo é 41. L'altro quadrato *dispari* contenuto in 41 dee terminare in 5, acciò possa aversi per residuo un quadrato *pari*. Prendo adunque il $5^2=25$, e sottraendolo da 41, resta appunto $16=4^2$. Disciolgo 5 in 4^2+3^2, ed ho il 770 eguale a quattro quadrati. Sottraggo infine il *dispari* 1 da 41, ed ho l'avanzo $40=6^2+2^2$

$$770=27^2+5^2+4^2$$
$$=27^2+4^2+4^2+3^2$$
$$=27^3+6^2+2^2+1^2$$
$$770=25^2+9^2+8^2$$
$$25^2+12^2+1^2$$
$$770=23^2+15^2+4^2$$
$$=23^2+12^2+9^2+4^2$$
$$770=21^2+15^2+10^2+2^2$$
$$770=19^2+20^2+3^2$$
$$=19^2+16^2+12^2+3^2$$

Terminata così la decomposizione col *dispari* fisso 27^2, prendo il *dispari* prossimo minore 25^2, e sottraendolo da 700 ho il primo avanzo 145, dal quale conviene che tolga un quadrato *dispari* che termini in 1, ovvero in 9 acciò il residuo possa essere un quadrato *pari*. Prendo adunque la serie dei quadrati 121, 81, 1, e dipoi 49, 9. Sottraggo ciascuno di questi dal 145, e trovo due decomposizioni del 770 col quadrato fisso 25^2.

Seguito dipoi a prendere i quadrati *dispari* continuamente minori 23^2, 21^2, 19^2 ec, e facendo lo stesso calcolo colle prescritte avvertenze trovo tutte le possibili decomposizioni del 770 in quadrati, come si veggono per esteso in margine.

$$=19^2+18^2+7^2+6^2$$
$$770=17^2+20^2+9^2$$
$$=17^2+16^2+15^2$$
$$=17^2+16^2+12^2+9^2$$
$$770=15^2+20^2+9^2+8^2$$
$$=15^2+20^2+12^2+1^2$$
$$770=13^2+24^2+5^2$$
$$=13^2+24^2+4^2+3^2$$
$$=13^2+22^2+9^2+6^2$$
$$=13^2+18^2+14^2+9^2$$
$$770=11^2+24^2+8^2+3^2$$
$$770=9^2+26^2+3^2+2^2$$
$$=9^2+22^2+14^2+3^2$$

L'Analisi indeterminata, di cui tratterò in altro volume, offre un metodo molto più preciso per decomporre in quadrati i numeri di varie forme. Frattanto per la pratica credo sufficiente anche il metodo qui spiegato.

128. Prob. 2do Determinare quanti sieno i numeri positivi minori del positivo A, e *primi* con esso.

Chiamo N il numero domandato dei minori, e *primi* con A; ed osservo primieramente che se A è *primo*, tutti i numeri da 1 fino ad $A-1$ saranno *primi* con A, e perciò in questo caso $N=A-1$ numero pari.

Osservo in secondo luogo che se A è potenza di qualchè numero *primo* p, per esempio $A=p^n$, tutti i multipli di p, cioè p, $2p$, $3p$ . . . p^n-p non saranno primi con A. Dunque se dal numero p^n-1 di tutti i minori di A si tolga il numero $p^{n-1}-1$ dei multipli di p, resterà il numero dei minori, e *primi* con A Avremo pertanto in questo caso $N=p^n-1-(p^{n-1}-1)$, ovvero $N=p^{n-1}(p-1)$ numero pari.

Sia infine A un numero qualunque non *primo*. Potrà sempre farsi $A=a^x b^y c^z$ ec. in cui a, b, c ec. sono numeri *primi*. I minori di A da escludersi per averne i *primi* saranno primieramente tutti i multipli di a da 1 ad $A-1$, cioè a, $2a$, $3a$ . . . $(\frac{A}{a}-1)a$; il numero dei quali è $\frac{A}{a}-1$. Tolto questo numero dal totale $A-1$, resterà $A(\frac{a-1}{a})$, numero dei minori di A primi con a. Da questo residuo conviene adesso togliere tutti i multipli di b, cioè b, $2b$ . . . . . $(\frac{A}{b}(\frac{a-1}{a})-1)b$. Avremo

così un secondo residuo $A\left(\frac{a-1}{a}\right)-1-\left(\frac{A}{b}\left(\frac{a-1}{a}\right)-1\right)$ ovvero $A\left(\frac{a-1}{a}\right)\left(\frac{b-1}{b}\right)$, che sarà il numero di tutti i minori di A esclusi i multipli di a, e di b. Seguitando ad escludere i multipli di c ec. resterà infine il numero dei minori, e *primi* con A, cioè $N=A\left(\frac{a-1}{a}\right)\left(\frac{b-1}{b}\right)\left(\frac{c-1}{c}\right)$ ec, numero pari.

Sia per esempio il numero $144=2^4.3^2$, sarà $N=144\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=48$; ed infatti i numeri, minori, e *primi* con 144 sono i 48 seguenti

1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29
31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 55, 59
61, 65, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 85, 89
91, 95, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 115, 119
121, 125, 127, 131, 133, 137, 139, 143

129. Teorema 5to. Il numero resultante dal prodotto $1.a.b\ c\ldots(A-1)\pm1$, i di cui fattori a, b, $c\ldots A-1$ sieno tutti minori, e *primi* con A è multiplo di A. Dee prendersi il $+1$ nel caso di $A=2$, ovvero 2^2, e nel caso di $A=p$, ovvero p^n, ovvero $2p^n$ denotando p un numero *primo* diverso da 2. In tutti gli altri casi dee prendersi il -1.

Dal problema precedente risulta che il numero dei minori, e *primi* con A è pari in tutti i casi; e perciò moltiplicando a due, a due i numeri 1, a, b, c ..... $A-1$ in modo che le moltipliche sieno fatte da numeri differenti, saranno essi tutti compresi in un solo modo in tali prodotti bi-

narj. Ma il prodotto degli estremi $1(A-1)$ è $A-1$; laonde, qualora ogni binario degli intermedj si trovi eguale ed $Ay\pm1$, il proposto numero $1.a.b.c\ldots(A-1)$ avrà la forma $MA\mp1$, e quindi $MA\mp1\pm1$ sarà multiplo di A. Tentiamo adunque di risolvere l'equazione $ax=Ay\pm1$ nell'ipotesi che a, x sieno due qualunque degli intermedj a,b,c ec; e dipoi osserveremo in quali casi debba prendersi il $+1$, ovvero il -1 per l'intento nostro.

Essendo qualunque degli intermedj a *primo* con A, suppongasi $A=aq+r$, in cui $q=\frac{A}{a}$, ed r l'avanzo. Tornando a dividere a per r avremo $a=rq'+r'$ e così seguitando le divisioni verremo ad un ultimo avanzo, che sarà 1. Pertanto nell'ipotesi che dopo cinque sì fatte divisioni venga l'avanzo 1, avremo le equazioni

$$\left.\begin{array}{l} A=aq+r \\ a=rq'+r' \\ r=r'q''+r'' \\ r'=r''q'''+r''' \\ \qquad (4) \\ r''=r'''q+1 \end{array}\right\}(X)$$

Posto ciò dividasi per a la proposta $ax=Ay\pm1$ ed avremo;

$$x=\frac{Ay\pm1}{a}=qy+\frac{ry\pm1}{a}$$

Facciasi $x'=\frac{ry\pm1}{a}$; ed avremo;

$$y=\frac{ax'\mp1}{r}=q'x'+\frac{r'x'\mp1}{r}$$

Facciasi $x''=\frac{r'x'\mp1}{r}$, ed avremo

$$x'=\frac{rx''\pm1}{r'}=q''x''+\frac{r''x''\pm1}{r'}$$

Facciasi $x'''=\frac{r''x''\pm1}{r'}$, ed avremo

$$x' = \frac{r'x''' \mp 1}{r''} = q'''x''' + \frac{r'''x''' \mp 1}{r''}$$

Facciasi $x^{(4)} = \frac{r''''x'''' \mp 1}{r''}$, ed avremo

$$x''' = \frac{r''x^{(4)} \pm 1}{r'''} = q\,x^{(4)} + \frac{x^{(4)} \pm 1}{r'''}$$

Facciasi infine $x^{(5)} = \frac{x^{(4)} \pm 1}{r''}$, ed avremo

$$x^{(4)} = r'''x^{(5)} \mp 1$$

Ottenuta questa ultima equazione senza rotto si prenda da essa il valore di $x^{(4)}$, si sostituisca nella precedente, e risulterà $x''' = r''x^{(5)} \mp q$

Sostituito questo valore di x''' nella 4ta equazione risulterà;

$$x'' = r'x^{(5)} \mp (q'''q^{(4)} + 1)$$

Ponendo il valore di x'' nella terza equazione otterremo primieramente $x' = rx^{(5)} \mp \frac{r}{r'}(q'''q^{(4)} + 1) \pm \frac{1}{r'}$

E rammentandosi che dalle equazioni (X) abbiamo $r = r'q'' + r''$, ne ricaveremo;

$$x' = rx^{(5)} \mp q''(q'''q^{(4)} + 1) \mp \frac{r''}{r'}(q'''q^{(4)} + 1) \pm \frac{1}{r'}.$$

Dalle medesime equazioni risulterà

$$r'' = \frac{r'''q^{(4)} + 1}{r'}$$

$$(r''q'^{(4)} + 1)q''' + r'''$$

Il qual valore sostituito nella precedente darà infine;

$$x' = rx^{(5)} \mp (q''(q'''q^{(4)} + 1) + q^{(4)})$$

Continuando un simile calcolo si avranno y, ed x per mezzo della sola indeterminata $\overset{(5)}{x}$; cioè;

$$y = a\overset{(5)}{x} \mp ((q'q''+1)(q'''\overset{(4)}{q}+1)+q'\overset{(4)}{q})$$

$$x = A\overset{(5)}{x} \mp ((qq'q''+q''+q)(q'''\overset{(4)}{q}+1)+(qq'+1)\overset{(4)}{q})$$

Si noti che nell'equazione $x''' = r''\overset{(5)}{x} \mp \overset{(4)}{q}$ abbiamo $r'' > \overset{(4)}{q}$ come vedesi dall'ultima delle equazioni (X).

Parimente nell'equazione $x'' = r'\overset{(5)}{x} \mp (q'''\overset{(4)}{q}+1)$ abbiamo $r' > q'''\overset{(4)}{q}+1$; poichè per la penultima delle equazioni (X) $r' > r''q'''+1$, ed $r'' > \overset{(4)}{q}$.

Seguitando queste osservazioni troveremo che ancora nelle equazioni di y; e di x i coefficienti a, A saranno maggiori dei respettivi polinomj composti dei quoti q, q' ec; e perciò i valori di x; e di y saranno intieri, e positivi dando un valore positivo all'indeterminata $\overset{(5)}{x}$

Posto per brevità

$$n = (q'q''+1)(q'''\overset{(4)}{q}+1)+q'\overset{(4)}{q}$$

$$n' = (qq'q''+q''+q)(q'''\overset{(4)}{q}+1)+(qq'+1)\overset{(4)}{q}$$

prendiamo a considerare pel nostro oggetto le equazioni: $y = a\overset{(5)}{x} \mp n$ $\quad x = A\overset{(5)}{x} \mp n'$

Queste risolvono la proposta $ax = Ay \pm 1$ in più modi, facendo $\overset{(5)}{x} = 0, 1, 2, 3$ ec. Nel nostro caso però in cui si vuole $x < A-1$ converrà prendere

unicamente $x \overset{(5)}{=} 1$ allorchè abbiamo $-n'$, che dipende dal $+1$ nella proposta; e converrà prendere $x \overset{(5)}{=} 0$ quando abbiasi $+n'$, cioè nella proposta il -1. Avremo adunque per la risoluzione di $ax=Ay+1$ i valori $y=a-n, x=A-n'$, e per la risoluzione di $ax=Ay-1$, sarà $y=n$, $x=n'$. E siccome le quantità A, a, n, n' sono determinate, una sola soluzione potrà avere la proposta $ax=Ay\pm1$ nel caso richiesto che sia $x<A-1$.

Sia per esempio $A=13$; tutti i minori, e primi con esso sono, 1, 2, 3 . . . 12. Escluso il prodotto degli estremi $1\times12=13-1$ si faccia $a=2$, dipoi $a=3$ ec, e si troveranno per l'equazione $ax=13y+1$ le risoluzioni seguenti,

$$2\times7=13+1$$
$$3\times9=2\times13+1$$
$$4\times10=3\times13+1$$
$$5\times8=3\times13+1$$
$$6\times11=5\times13+1$$

Ed altresì l'equazione $ax=13y-1$ avrà le soluzioni

$$2\times6=13-1$$
$$3\times4=13-1$$
$$5\times5=2\times13-1$$
$$7\times11=6\times13-1$$
$$8\times8=5\times13-1$$
$$9\times10=7\times13-1$$

Facciasi qui l'importante osservazione che prendendo $ax=13y+1$ tutte le soluzioni comprendono appunto tutti i numeri intermedj frà 1, e 12, mentre in $ax=13y-1$ vi sono due soluzioni, in cui $a=x$. Adunque se il numero $1.2.3.\ldots12\pm1$ vogliasi multiplo di 13 converrà prendere il $+1$, e non già il -1.

Questo risultamento non solo si verifica nel numero *primo* 13, ed evidentemente ancora nel 2, e nel 2^2, ma si bene in qualunque altro numero *primo* p, ed anche in p^n, e p^{2n}, conforme annunzia il teorema.

Infatti prendendo $ax=py+1$, e supponendo possibile che sia $a=x$ avremmo $\frac{a^2-1}{y}$, ovvero $\frac{(a+1)(a-1)}{y}=p$: dunque y dovrebbe essere submultiplo di $a+1$, ovvero di $a-1$. Chiamato q il quoto avremmo $q(a\pm1)=p$, e perciò p non sarebbe *primo* contro l'ipotesi.

Parimente se fosse possibile $a^2=py^n+1$, avremmo collo stesso discorso $q(a\pm1)=p^n$, e quindi $\frac{q(a\pm1)}{p^{n-1}}=p$. Chiamato q' il quoto $\frac{q}{p^{n-1}}$, ovvero $\frac{a\pm1}{p^{n-1}}$, sarebbe $qq'=p$, ovvero $q'(a\pm1)=p$. Il che è impossibile nell'ipotesi che p sia *primo*.

Infine supponendo $a^2=2py^n+1$, sarebbe $(a+1)(a-1)=2py^n$: e perchè $2p$ è numero pari, conviene che a *primo* con esso sia dispari: onde è che $a+1$, ed $a-1$ sono amendue divisibili per 2; e perciò fatta la divisione, resterà $q(a\pm1)=p^n$, equazione assurda per la dimostrazione precedente.

Da tale indagine resta dimostrato che ogni qualvolta si trovi $a^2=Ay-1$, il numero A dee essere un *primo* p, ovvero (essendo p diverso da 2) un

numero delle forme p^n, $2p^n$. Perciò qualunque altro valore diasi al numero A quella equazione non è risolubile, ma si risolverà $ax=Ay-1$ con x sempre diverso da a. E quindi segue che il prodotto $1.a.b\ c^3..(A-1)-1$ è multiplo di A eccettuati i sopradetti casi prescritti nel teorema. Il che ec.

130. Teor 6to. Nelle serie delle potenze a^0, a^1, a^2, a^3 ec. se ciascun termine si divida pel numero p *primo* con a, i differenti *resti* di tali divisioni incominciando da a^0 debbono tornare i medesimi, e collo stesso *periodo* dopo un termine a^t, in cui $t<p$. E se p è inoltre assolutamente *primo*, sarà $t=p-1$, ovvero *submultiplo* di $p-1$.

Prendasi ad arbitrio il termine $a^m=pq+r$, dove $m<p$, q il quoto di $\frac{a^m}{p}$, ed r l'avanzo. Seguitando le divisioni per p dei termini successivi a^{m+1}, a^{m+2} ec. i *resti* 1, 2. 3.. $p-1$ potranno essere differenti da r per un numero di termini $p-2$ al più, dopo di chè il termine $p-1$ avrà la forma $a^{m'}=pq'+r$, e sarà $m'=m+p-1$. Ciò posto è evidente che in qualunque caso $m'-m<p$, e la differenza $a^{m'}-a^m$ dà l'equazione $a^m(a^{m'-m}-1)=p(q'-q)$ Fatto per brevità $m'-m=t<p$, $q'-q=q''$, avremo $a^m(a^t-1)=pq''$. Ma p primo per ipotesi con a^m, lo è pure con a, dunque p deve essere *submultiplo* di a^t-1,

ed avremo perciò $a^t = pq'' + 1$.

Adunque il termine a^t della proposta serie, ed il primo termine $a^0 = 1$ ambedue divisi per p danno lo stesso residuo 1; ed osservando che dalla equazione $a^t = pq' + 1$ provengono le seguenti,

$$a^{t+1} = pq''a + a$$
$$a^{t+2} = pq''a^2 + a^2$$
$$a^{t+3} = pq''a^3 + a^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^{2t} = (pq')^2 + 2pq'' + 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^{nt} = (pq'')^n \cdots\cdots + npq'' + 1$$

si deduce che i *resti* della serie nei termini $a^t, a^{t+1} \ldots a^{2t-1}$ ritornano i medesimi, e collo stesso *periodo* di quelli dei termini, precedenti $a^0, a^2, a^3 \ldots a^{t-1}$: e che il periodo medesimo di *resti* si rinnuova in ciascun intervallo dei termini $a^t, a^{2t} \ldots a^{nt}$.

Qualora poi il numero p oltre l'essere *primo* con a sia assolutamente *primo* già sappiamo (122) che il numero $a^{p-1} - 1$ è multiplo di p, onde in questo caso $t = p-1$, ovvero $nt = p-1$. Il che ec.

131. Si ricava di qui il metodo di ottenere pron-

tamente il *resto* di una potenza comunque elevata a^m divisa per qualsivoglia numero p *primo* con a. Vogliasi per esempio il *resto* di 4^{101} diviso per 15. Si cerchi primieramente la potenza $4^t = 15.q+1$; e si troverà facilmente $4^2 = 15+1$. Dipoi si divida per 2 il 101, ed avremo 4^{101}, ovvero $4^{2\times 50+1}$, che diviso per 15 deve dare lo stesso *resto* che il 4^1, e questo *resto* sarà appunto il 4. 132. Allorchè i termini della serie a^0, a^1, a^2... a^{p-1} divisi consecutivamente per p numero assolutamente *primo*, e *primo* con a, danno tutti i residui differenti 1, 2, 3.... $p-1$, il numero a per rapporto a p dicesi *radice primitiva*. Così il numero 2 è *radice primitiva* del 19, perchè si trova dividendo per 19;

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Potenze	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Resti	1	2	4	8	16	13	7	14	9	18

	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Potenze	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Resti	17	15	11	3	6	12	5	10	1

Si osservi che per ottenere tali *resti* non importa calcolare le potenze della *radice*, e dividerle dipoi pel numero *primo* p. Basta soltanto moltiplicare per la *radice* il residuo della potenza precedente, e dipoi dividere per p questo prodotto. Così il *resto* di $\frac{2^8}{19}$ sarà quello del prodotto $\frac{2.14}{19}$ cioè 9; il resto

di $\frac{2^9}{19}$ sarà quello di $\frac{2.9}{19}$, cioè 18. ec.

133. Teor. 7mo. Supposto il numero a una delle *radici primitive* del numero *primo* p, ed il numero h minore, e *primo* con $p-1$, il *resto* r della divisione $\frac{a^h}{p}$ sarà ancora *radice primitiva* di p.

Sia $a^h = pq + r$; il residuo r non può essere 1 perchè a è *radice primitiva* di p, ed $h < p-1$. Elevando alla potenza $p-1$ la precedente equazione, e intendendo pq' eguale alla somma di tutti i termini moltiplicati per p nello sviluppamento del binomio $(pq+r)^{p-1}$, ottengo $a^{h(p-1)} = pq' + r^{p-1}$. Ma $a^{h(p-1)}$ è numero multiplo di p (130): facendo adunque $a^{h(p-1)} = pq'' + 1$, sarà $r^{p-1} = p(q'' - q') + 1$.

Acciocchè quest' ultima equazione costituisca r *radice primitiva* di p conviene che r^{p-1} sia dopo r^0 l' infima potenza di r, che divisa per p lascia per *resto* l' unità; il che dimostrasi nel seguente modo. Preso un submultiplo qualunque n di $p-1$ deduco dalla proposta $a^h = pq + r$ l' equazione $a^{\frac{h(p-1)}{n}} = pq''' + r^{\frac{p-1}{n}}$. Che se suppongasi possibile essere $r^{\frac{p-1}{n}} = pq'''' + 1$, sarebbe $a^{\frac{h(p-1)}{n}} = p(q'''' + q''') + 1$. E poichè a è *radice primitiva* di p, conviene che $\frac{h}{n}$ sia

un numero intiero, affinchè questa ultima equazione abbia luogo. Ma essendo per ipotesi h *primo*, ed n *submultiplo* di $p-1$ è impossibile che $\frac{h}{n}$ sia numero intiero. Dunque nòn può aver luogo l'equazione $a^{\frac{h(p-1)}{n}}=p(q'''+q''')+1$, ed è in conseguenza impossibile la supposta $r^{\frac{p-1}{n}}=pq'''+1$; onde sarà r *radice primitiva* di p. Il che ec.

134. Siegue di qui; Che frà i numeri $1, 2, 3; \ldots p-1$ esistono tante *radici primitive* del numero primo p, quanti sono i numeri minori, è *primi* con $p-1$; e perciò data una qualunque *radice* a si possono facilmente determinare tutte quelle comprese fra 1, e $p-1$. Prendiamo per esempio il 2. *radice primitiva* del 19, e vogliansi determinare le altre comprese frà 1, e 18 I numeri minori, e *primi* con 18 sono sei (127), cioé 1, 5, 7, 11, 13, 17. Divido per 19 le potenze

$$2^1, 2^5, 2^7, 2^{11}, 2^{13}, 2^{17};$$

le *radici primitive* saranno i *resti* 2, 13, 14, 17, 3, 10.

Siccome il Teorema suppone che esista sempre una *radice primitiva* per qualunque numero *primo* potrebbe dubitarsi che esistesse qualchè numero *primo* a cui non convenisse alcuna *radice*. Per rimuovere un tal dubbio basterà la soluzione del seguente

135. Prob. 3° Trovare una delle *radici primitive* di qualunque numero *primo* p.

Risoluto il numero $p-1$ nei suoi fattori *primi*

$$\begin{matrix} x & y & z \\ a & b & c \end{matrix}$$

ec. si scelga nella serie $1, 2, 3, p-1$ un

numero g tale, che $g^{\frac{p-1}{a}}$ diviso per p dia un *resto* diverso dall'unità; la potenza minore $g^{\frac{p-1}{a^x}}$ divisa per p non potrà dare per *resto* l'unità; perciocchè supponendo $g^{\frac{p-1}{a^x}} = pq+1$; ed elevando alla potenza a^{x-1}, si avrebbe $g^{\frac{p-1}{a}} = (pq+1)^{a^{x-1}} = pq'+1$: onde anche $g^{\frac{p-1}{a}}$ divisa per p darebbe 1 di *resto* contro l'ipotesi.

Sia pertanto l'equazione $g^{\frac{p-1}{a^x}} = pq+r$ in cui r si è dimostrato dovere essere diverso da 1. Elevando questa alla potenza a^x si ottiene $g^{\frac{p-1}{x}} = pq'+r^{a^x}$. E poiché $g^{p-1} = pq''+1$ (123), avrò $r^{a^x} = p(q''-q')+1$; ed è inoltre r^{a^x} infima potenza di r dopo r^0 che divisa per p lascia per *resto l'unità*.

Imperocchè essendo a numero *primo*, la potenza a^x non può avere altri divisori che una potenza minore a^n: perciò qualunque potenza intiera minore di r^{a^x} sarà della forma $r^{a^{x-n}}$. Ora se fosse possibile

l'equazione $r^{a^{x-n}} = pq''' + 1$, dalla proposta $g^{a^{\frac{p-1}{x}}}$ ma $pq + r$ si potrebbe dedurre $g^{a^{\frac{p-1}{u}}} = pq''' + r^{a^{x-n}} = p(q''' + q''') + 1$. Ma abbiamo premesso essere impossibile che una potenza minore di g^{p-1}, come è $g^{a^{\frac{p-1}{n}}}$, divisa per p dia 1 di *resto*; dunque la supposta equazione $r^{a^{x-n}} = pq''' + 1$ è del pari impossibile.

Trovati collo stesso calcolo altri numeri g'^{p-1}, g''^{p-1} ec, i di cui residui r', r'' elevati alle potenze b^{y}, c^{z}; e divisi dipoi per p sieno le potenze meno elevate che lascino per *resto* l'unità, è facile vedere che riducendo $r'^{a^{x}}$ $r'^{b^{c}}$, $r''^{c^{z}}$ ec. alla stessa potenza a^{x} b^{y} c^{z}, ed i loro respettivi valori alle potenze b^{y} c^{z}, a^{x} c^{z}, a^{x} b^{y}, il prodotto $(rr'r'')^{a^{x}b^{y}c^{z}}$, cioè $(rr'r'')^{p-1}$ eguaglierà $Pp+1$ intendendo colla lettera P la somma dei moltiplicatori di p nei predetti valori potenziati, e fra loro moltiplicati. Eseguito tutto ciò io dico che il prodotto $rr'r''$ sarà una delle *radici primitive* di p.

Infatti se $rr'r''$ non è *radice primitiva* vi sarà almeno un numero s minore e *submultiplo* di $p-1$,

che renderà $(rr'r'')^{t} = pQ+1$. Ma $p-1 = a^{x}b^{y}c^{z}$ in cui a, b, c, sono *primi*, dunque $\frac{p-1}{t}$ sarà uno di tali numeri, o un multiplo di loro; e ponendo $\frac{p-1}{t} = na$, e quindi $\frac{p-1}{a} = nt$, avremo $(rr'r'')^{nt}$ ovvero $(rr'r'')^{\frac{p-1}{a}} = pq'+1$ (130). Rammentandosi adesso che r'^{b}, r''^{c} divisi per p lasciano per *resto* l'unità e lo stesso lasciano moltiplicando gli esponenti loro per a^{x-1}, fà d'uopo concludere parzialmente che sia $(r'r'')^{a^{x-1}b^{y}c^{z}} = (r'r'')^{\frac{p-1}{a}} = pQ''+1$. Quindi è chè nella precedente equazione $(rr'r'')^{\frac{p-1}{a}} = pQ'+1$ dovrà essere $r^{\frac{p-1}{a}} - 1$ multiplo di p. Ora avendosi già $r^{a^{x}} - 1$ multiplo di p conviene che a^{x} sia *submultiplo* di $\frac{p-1}{a}$, vale a dire che $\frac{p-1}{a^{x+1}}$ sia nnmero intiero; il che è falso, poichè $\frac{p-1}{a^{x+1}} = \frac{a^{x}b^{y}c^{c}}{a^{x+1}} = \frac{b^{y}c^{z}}{a}$, numero frazionario perchè b, c, a sono *primi* fra loro per

ipotesi. Resta quindi evidente, che l' equazione $(rr'r'')^{nt} = pQ'+1$ è assurda, e tale è in conse-

guenza la supposta $(rr'r'')^{t} = pQ+1$. Laonde $rr'r''$ è *radice primitiva* di p. Il che ec.

136. Applichiamo questa soluzione alla ricerca delle *radici primitive* del numero *primo* 31.

Il numero 30 è risolubile nel prodotto dei fattori primi 2. 3. 5. Frà i minori di 30 si prendano gli stessi 2, 3, 5; ed avremo $2^2 = 0\times31+4$, $3^3 = 0\times31+27$, $5^5 = 100\times31+25$. Adunque il prodotto di questi residui $4\times27\times25=2700$ sarà una delle *radici primitive* del 31. Ma perchè giova prendere le più semplici, cioè quelle minori di 30, facciasi $2700=87\times31+3$, ed il residuo 3 pel passato Teorema 7°. sarà pure una delle *radici primitive* del 31, e la più semplice.

Adesso per determinare tutte le altre *radici primitive* minori di 30 si prendono i numeri minori, e primi con 30, cioè 2, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ed a norma del precitato Teorema troveremo;

	1	7	11	13	17	19	23	29
Potenze	3,	3,	3,	3,	3,	3,	3,	3.
Radici primitive di 31	3,	17,	13,	24,	22,	12,	11,	21

137. Sia g una delle *radici primitive* del numero primo p, e sia il numero pari $n+1=fa$. Se nella serie $x^{g^0} + x^{g^1} + x^{g^2} \ldots + x^{g^{(f-1)a}}$ si prendano i termini $x^{g^0} + x^{g^a} + x^{g^{2a}} \ldots + x^{g^{(f-1)a}}$;

questa seconda serie si chiama *periodo*; perciocchè continuandolo a piacimento coi termini $x^{g^{fa}} + x^{g^{(f+1)a}} \ldots x^{g^{2fa}} \ldots x^{g^{fa}} \ldots x^{g^{(2f-1)a}}$ ec. gli esponenti da g^{fa} fino a $g^{(2f-1)a}$, e dipoi da g^{2fa} fino a $g^{(2f-1)a}$ ec. divisi per p danno continuamente gli stessi *resti* dei primi da g^{fa} fino a $g^{(f-1)a}$ parimente divisi per p, conforme si è dimostrato (130).

E' anche facile il vedere, che moltiplicando i termini del *periodo* per un termine della forma $x^{g^{na}}$, il nuovo *periodo* $x^{g^{na}} + x^{g^{(n+1)a}} + x^{g^{(n+2)a}} \ldots + x^{g^{(n+f-1)a}}$ dello stesso numero f di termini sarà *identico* col primo, cioè i *resti* dei respettivi esponenti divisi per p saranno gli stessi in amendue i *periodi*, sebbene con ordine diverso. Infatti il termine $x^{g^{na}}$ si ritroverà frà $x^{g^{fa}}$, ed $x^{g^{(f-2)a}}$, ovvero frà $x^{g^{fa}}$, ed $x^{g^{(2f-1)a}}$ ec. Ma qualunque di tali termini è *identico* (riguardo al *resto* del suo esponente diviso per p) con alcuno di quelli del primo periodo da $x^{g^{fa}}$ fino ad $x^{g^{(f-1)a}}$. Lo stesso si avvera nei termini consecutivi

$(n+1)a$ $(n+2)a$

x^g , x^g ec. Dunque il *periodo* così variato è *identico* col primo.

Sia per esempio $p=19$, la sua *radice primitiva* $g=2$, $f=6$; $a=3$; ed abbiasi il periodo

$$\overset{0}{x^2} + \overset{3}{x^2} + \overset{6}{x^2} + \overset{9}{x^2} + \overset{12}{x^2} + \overset{15}{x^2}$$

Supponiamo che la moltiplica dei suoi termini si faccia per $x^{\overset{17\times3}{51}} = x^2$: il nuovo *periodo* sarà

$$x^{\overset{51}{2}} + x^{\overset{54}{2}} + x^{\overset{57}{2}} + x^{\overset{60}{2}} + x^{\overset{63}{2}} + x^{\overset{66}{2}}$$

Siccome in questo caso i quozienti $\frac{2}{19}$, $\frac{2}{19}$, $\frac{2}{19}$, lasciano tutti per *resto* l'unità, conforme la lascia $\frac{2^0}{19}$, divido per 18 tutti gli esponenti della *radice* 2, e così gli esponenti della x nel nuovo *periodo* diventano

$$2^{2.18+15}, 2^{3.18}, 2^{3.18+3.3.18+6}, 2^{3.18+9}, 2^{3.18+12}$$

Ma dividendo ciascuno di questi per 19 è evidente che avremo gli stessi *resti* che lasciano gli esponenti del primo periodo $\overset{0}{2}, \overset{3}{2}, \overset{6}{2}, \overset{9}{2}, \overset{12}{2}, \overset{15}{2}$, cioè 1, 8, 7, 18, 11, 12. Adunque ambedue i *periodi* sono *identici*, perchè ognuno di essi, trascurando l'ordine dei termini, si riduce ad una istessa forma

$$x + x^{\overset{7}{8}} + x^{\overset{8}{11}} + x^{\overset{11}{12}} + x^{\overset{12}{18}} + x^{\overset{18}{}}$$

Per abbreviare le espressioni si scriveranno da qui

in avanti i soli esponenti della x posti frà le parentesi. Così $(1)+(g)+(g^{2})\ldots+(g^{(f-1)a})$ esprimerà la serie $x^{g^{0}}+x^{g^{1}}+x^{g^{2}}\ldots+x^{g^{(f-1)a}}$; e l'espressione del *periodo* sarà $(1)+(g^{a})+(g^{2a})\ldots+(g^{(f-1)a})$. Questo periodo essendo lo stesso qualunque sia la base g si annunzia scrivendo $(f,1)$; ed in generale se ciascuno dei suoi termini è moltiplicato per un numero qualunque l intiero, e positivo, il nuovo periodo $(l)+(lg^{a})+(lg^{2a})\ldots+(lg^{(f-1)a})$ si annunzia scrivendo (f,l)

138. Se $f=p-1$, e quindi $a=1$, il *periodo* $(f,1)$ comprende evidentemente tutti i termini $(1)+(g)+(g^{2})\ldots\ldots(g^{f-1})$. Qualunque altro valore possano avere f, a, purchè sia sempre $fa=p-1$, la serie $(1)+(g)+(g^{2})\ldots\ldots+g^{(fa-1)}$ sarà composta dei periodi $(f,1)+(f,g)+(f,g^{2})\ldots\ldots+(f,g^{a-1})$. Abbiamo infatti;

$$(f,1)=(1)+(g^{a})+(g^{2a})+(g^{3a})\ldots+(g^{(f-1)a})$$

$$(f,g)=(g)+(g^{a+1})+(g^{2a+1})+(g^{3a+1})\ldots\ldots+(g^{(f-1)a+1})$$

$$(f,g^{2})=(g^{2})+(g^{a+2})+(g^{2a+2})+(g^{3a+2})\ldots+(g^{(f-1)a+2})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(f,g^{a-1})=(g^{a-1})+(g^{2a-1})+(g^{3a-1})+(g^{4a-1})\ldots\ldots+(g^{fa-1})$$

La somma di tutti i termini del secondo membro di queste equazioni forma evidentemente l'intiera serie $(1)+(g)+(g^{2})\ldots\ldots+(g^{fa-1})$

139. Se $f=bc$, essendo b, c numeri intieri, e positivi, il *periodo* (bc,l) si può risolvere in un numero b di periodi, ognuno dei quali comprende un numero c di termini; e questi *periodi* sono $(c,l)+(c,lg^{a})+(c,lg^{2a})\ldots\ldots+(c,lg^{(b-1)a})$.

Imperciocchè abbiamo in questo caso l'intiero *periodo*;

$$(f,l)=(l)+(lg^{a})+(lg^{2a})\ldots\ldots+(lg^{ba})\ldots\ldots+(lg^{(bc-1)a})$$

E poichè $abc=p-1$, se prendasi $c=f$, l'altro fattore è ab: onde potrà formarsi un numero b di *periodi* di c termini, come segue;

$$(c,l)=(l)+(lg^{ab})+(lg^{2ab})\ldots\ldots+(lg^{(c-1)ab})$$

$$(c,lg^{a})=(lg^{a})+(lg^{a(b+1)})+(lg^{2a(b+1)})\ldots+(lg^{a(c-1)(b+1)})$$

$$(c,lg^{2a})=(lg^{2a})+(lg^{a(b+2)})+(lg^{2a(b+2)})\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+(lg^{a(c-1)(b+2)})$$

. . . . . .

$$(c,lg^{a(b-1)})=(lg^{a(b-1)})+(lg^{a(2b-1)})+(lg^{a(3b-1)})\ldots$$

$$\ldots\ldots+(lg^{(bc-1)a})$$

Sommando ciascuna colonna dei secondi membri di queste equazioni apparisce che il *periodo* (bc,l) è contenuto nei *periodi* $(c,l)+(c,lg^{a})\ldots+(c,lg^{(bc-1)a})$.

Prendiamo in esempio il numero primo 31, del

quale una *radice primitiva* è il 3; ed è $31-1=2.3.5$. Preso $b=6$, $a=5$, $l=1$, abbiamo il *periodo* intiero

$$(6,1)=(1)+(3^{5})+(3^{10})+(3^{15})+(3^{20})+(3^{25})$$

Risoluto il numero 6 nei suoi fattori 2. 3 avremo $a=2$, $b=3$, $ab=15$; ed il *periodo* $(6,1)$ resterà risoluto nei tre *periodi* seguenti di due termini per ciascheduno.

$$(2,1)=(1)+(3^{15})$$
$$(2,3^{5})=(3^{5})+(3^{20})$$
$$(2,3^{10})=(3^{10})+(3^{25})$$

Preso $b=2$, $a=3$, sarà $ab=10$; e i due *periodi* componenti $(6,1)$ saranno

$$(3,1)=(1)+(3^{10})+(3^{20})$$
$$(3,3^{5})=(3^{5})+(3^{15})+(3^{25})$$

140 Teor. 8°. Sieno (f,l), (f,m) due *periodi* simili fra loro, identici o diversi; sia al solito $fa=p-1$, e fatto $g^{a}=h$, sia $(f,l)=(l)+(lh)+(lh^{2})\ldots\ldots+(lh^{f-1})$. Il prodotto di (f,l) per (f,m) sarà l'aggregato di f *periodi* simili di questa forma

$$(f,l+m)+(f,lh+m)+(f,lh^{2}+m)\ldots+(f,lh^{f-1}+m):$$

e la somma V di tali *periodi* potrà ridursi alla forma $Af=A'(f,1)+A''(f,g)+A'''(f,g^{2})\ldots+T(f,g^{d-1})$, in cui i coefficienti A, $A'\ldots T$ saranno numeri intieri, positivi ed anche alcuni eguali a zero.

Dovendo il *periodo* (f,m) essere simile al *periodo* (f,l), avremo $(f,m)=(m)+(mh)+(mh^{2})\ldots+(mh^{f-1})$

Dunque $(f,l)\times(f,m)=(f,l)\times[(m)+(mh)+(mh^{2})$
$\ldots\ldots+(mh^{f-1})]$

Ma perchè a norma dell'articolo 137 abbiamo (f,l)
$=(f,lh)=(f,lh^{2})$ ec. sarà ancora $(f,l)\times(mh)=$
$(f,lh)\times(f,mh)$; $(f,l)\times(mh^{2})=(f,lh^{2})\times(mh^{2})$, e
così di seguito. Avremo pertanto;

$$(f,l\times)(f,m)=(l+m)+(lh+m)+(lh^{2}+m)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+(lh^{f-1}+m)$$
$$+(lh+mh)+(lh^{2}+mh)+(lh^{3}+mh)$$
$$\ldots\ldots+(lh^{f}+mh)$$
$$+(lh^{2}+mh^{2})+(lh^{3}+mh^{2})+(lh^{4}+mh^{2})$$
$$\ldots\ldots+(lh^{f-1}+mh^{2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(lh^{f-1}+mh^{f-1})+(lh^{f}+mh^{f-1})+(lh^{f+1}+mh^{f-1})$$
$$\ldots\ldots+(lh^{2(f-1)}+mh^{f-1})$$

E sommando separatamente ciascuna colonna dei termini del secondo membro, sarà $(f,l)\times(f,m)=(f,$
$l+m)+(f,lh+m)+(f,lh^{2}+m)\ldots\ldots\ldots\ldots$
$+(f,lh^{f-1}+m)=V$

Dividendo adesso per p i numeri $l+m$; $lh+m$ ec. ai *resti* compresi nella serie $0, 1, 2, 3\ldots\ldots p-1$ si sostituiscano le potenze corrispondenti g^{0}, g^{1}, g^{2}

g^{fa-1}, e ridurremo così la somma V ad un aggregato di *periodi* della forma $(f,0)$ cioe f, ed inoltre $(f,1)$, (f,g^1), $(f,g^2)\ldots(f,g^{a-1})$, nei quali secondo l'articolo 138 si comprendono tutti i termini da (g^0) fino a (g^{fa-1}). Sarà perciò $V=Af+A'(f,1)+A''(f,g^1)\ldots+T(f,g^{a-1})$ dove i coefficienti A, $A'\ldots T$ saranno evidentemente numeri intieri, e positivi; e se manca alcuno dei *periodi*, il suo coefficiente sarà *zero*.

Apparisce di qui, che posto K un numero qualunque intiero, il prodotto di (f,Kl) per (f,Kn) sarà $(f,K(l+m)+(f,K(lh+m)\ldots\ldots\ldots+(f,K(lh^{f-1}+m))=V$, e potrà ridursi $V=Af+A'(f,K)+A''(f,Kg^1)+A'''(f,Kg^2)\ldots T(f,Kg^{a-1})$

Siccome il prodotto di ciascun termine di V per un simile *periodo* (f,n) si può ridurre ad una forma analoga, è manifesto che ancora il prodotto di tre *periodi* simili $(f,l)\times(f,m)\times(f,n)$ si può ridurre alla forma $Bf+B'(f,1)+B''(f,g)+B'''(f,g^2)\ldots\ldots+T'(f,g^{a-1})$: come ancora $(f,Kl)\times(f,Km)\times(f,Kn)$ si ridurrà alla forma $Bf+B'(f,K)+B''(f,Kg)+B'''(f,Kg^2)\ldots+T'(f,Kg^{a-1})$ Laonde il Teorema si estende al prodotto di qualunque numero di *periodi* simili, ne importa se questi sieno tutti diversi frà loro, ovvero sieno tutti, o in parte identici.

Facciamo una applicazione di questo Teorema al prodotto dei *periodi* $(6,1)\times(6,2)$ dipendenti da

numero primo 31, di cui già si è detto essere una *radice primitiva* il 3 ed $fa = 30$. Prendo $f=6$, $a=5$, e sarà; $(6,1)=(1)+(3^{5})+(3^{10})+(3^{15})+(3^{20})+(3^{25})$

$$(6,2)=(2)+(2.3^{5})+(2.3^{10})+(2.3^{15})+(2.3^{20})+(2.3^{25})$$

Ottengo adunque primieramente il prodotto

$$(6,1)\times(6,2)=(6,3)+(6,3^{5}+2)+(6,3^{10}+2)+(6,3^{15}+2)$$
$$+(6,3^{20}+2)+(6,3^{25}+2)$$

Divido per 31 i numeri $3^{5}+2$, $3^{10}+2$ ec, e sostituisco ad essi i loro *resti*, dimodo chè $(6,1)\times(6,2)=(6,3)+(6,28)+(6,27)+(6,1)+(6,7)+(6,8)$ Sostituisco ai *resti* 3, 28, 27 ec. le potenze corrispondenti della *radice primitiva* 3, ed ho $(6,1)\times(6,2)$

$$=(6,3)+(6,3^{16})+(6,3^{3})+(6,1)+(6,3^{28})+(6,3^{12})$$

Sviluppo infine i *periodi*, in cui la *radice* 3 è elevata ad una potenza superiore a $3^{a-1}=3^{4}$. E siccome a norma dell'articolo 130 si vede che in tali *periodi* dopo il termine 3^{30} ritornano gli stessi termini precedenti da 3^{0} fino a 3^{30}, riduco per esempio 3^{31}; a 3^{1}, 3^{36} a 3^{6} ec. Trovo così;

$$(6,3^{16})=(3^{16})+(3^{21})+(3^{26})+(3^{6})+(3^{11})=(6,3)$$
$$(6,3^{28})=(3^{28})+(3^{3})+(3^{8})+(3^{13})+(3^{18})+(3^{23})=(6,3^{3})$$
$$(6,3^{12})=(3^{12})+(3^{17})+(3^{22})+(3^{27})+(3^{2})+(3^{7})=(6,3^{2})$$

Adunque il prodotto $(6,1)\times(6,2)=(6,1)+2(6,3)$
$+(6,3^{2})+2(6,3^{3})$

141. Problema 4°. Trovare una formola, che per mezzo dei coefficienti $A, B, C \ldots T$ di una equazione qualunque dia la somma delle potenze n^{sime} delle sue radici. (0) (2) (n)

Rappresentino P; $P, P \ldots\ldots P$ le somme delle potenze da *zero* fino ad n delle radici $x', x'', x''' \ldots x^{(m)}$ della data equazione. $x^{m} - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots \pm T = 0$

Se $n=m$, si sostituiscano nella precedente in luogo di x tutte le sue radici ed avremo

$$x'^{m} - Ax'^{m-1} + Bx'^{m-2} \ldots \pm T = 0$$
$$x''^{m} - Ax''^{m-1} + Bx''^{m-1} \ldots \pm T = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^{(m)m} - Ax^{(m)m-1} + Bx^{(m)m-2} \ldots \pm T = 0$$

E sommando sarà $P^{(m)} - AP^{(m-1)} + BP^{(m-2)} \ldots \pm mT = 0$

Se $n > m$ pongasi $n = m + h$. Moltiplicata la data equazione per x^{h} diverrà

$$x^{m+h} - Ax^{m+h-1} + Bx^{m+h-2} \ldots\ldots \pm Tx^{h} = 0;$$

ovvero $x^{n} - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots \pm Tx^{n-m} = 0$

Adunque sostituendo in questa tutte le radici $x', x'' \ldots x^{(m)}$ invece della x, e dipoi sommando come sopra, avremo

$$P^{(n)} - AP^{(n-1)} + BP^{(n-2)} \ldots\ldots \pm TP^{(n-m)} = 0$$

Ma per dimostrare generalmente che una simile formola ha luogo non solo nei casi contemplati, ma ancora in tutti gli altri, si intenda col segno $\Sigma x^{n\prime} x^{n\prime\prime}$ la somma dei prodotti binarj delle potenze $x^{n\prime}$, $x^{n\prime\prime}$, $x^{n\prime\prime\prime}$ ec. colle radici x', x'', x''' ec. della proposta equazione. Similmente $\Sigma x^{n\prime} x^{n\prime\prime} x^{n\prime\prime\prime}$ rappresenti la somma dei prodotti ternarj delle potenze istesse colle radici, e così di seguito.

Pongansi primieramente le equazioni;

$$\begin{array}{l} x'^{n-1} + x''^{n-1} + x'''^{n-1} + \text{ec.} = P^{(n-1)} \\ x' + x'' + x''' + \text{ec.} = A \\ \hline \end{array}$$

Il prodotto sarà $P^{(n)} + \Sigma x'^{n-1} x'' = AP^{(n-1)}$, e quindi $P^{(n)} = AP^{(n-1)} - \Sigma x'^{n-1} x''$

Poste in seguito le equazioni

$$\begin{array}{l} x'^{n-2} + x''^{n-2} + x'''^{n-2} + \text{ec.} = P^{(n-2)} \\ x'.x'' + x'x''' + x''x''' + \text{ec.} = B \\ \hline \end{array}$$

Il prodotto sarà $\Sigma x'^{n-1} x'' + \Sigma x'^{n-2} x''x''' = BP^{(n-2)}$

e perciò $\Sigma x'^{n-1} x'' = BP^{(n-2)} - \Sigma x'^{n-2} x''x'''$. Dunque $P^{(n)} = AP^{(n-1)} - BP^{(n-2)} + \Sigma x'^{n-2} x''x'''$.

Continuando così il calcolo, che successivamente deriva dall'ultimo termine della precedente equazione, si vedrà essere;

$$\Sigma x'^{n-2} x'' x''' + \Sigma x'^{n-3} x'' x''' x'''' = CP^{(n-3)}$$

$$\Sigma x'^{n-3} x'' x''' x'''' + \Sigma x'^{n-4} x'' x''' x'''' x''''' = DP^{(n-4)}$$

E così di seguito fino all'ultimo termine, che nei differenti casi avrà differente determinazione, cioè; Nel caso di $n = m$, l'ultimo termine nascerà dal prodotto delle equazioni

$$x'^{0} + x''^{0} + x'''^{0} \ldots + \text{ec. } P^{(0)} = m$$

$$x' x'' x''' \ldots x^{(m)} = \pm T,$$

e sarà perciò come sopra $\pm m T$

Nel caso di $n > m$ l'ultimo termine nascerà dal prodotto delle equazioni

$$x'^{n-m} + x''^{n-m} + x'''^{n-m} + \text{ec} = P^{(n-m)}$$

$$x' x'' x''' \ldots x^{(m)} = \pm T;$$

e sarà perciò oome sopra $\pm TP^{(n-m)}$

Nel caso di $n < m$ l'ultimo termine nascerà dal prodotto delle equazioni

$$x^{0} + x''^{0} + x'''^{0} \ldots + \text{ec.} = P^{(0)} = m$$

$$x' x'' x''' \ldots x^{(n)} + x' x'' x'''' \ldots x^{(n)} + \text{ec.} = \pm R$$

ed avremo perciò $\Sigma x' x'' x''' \ldots x^{(n)} + \Sigma x'^{0} x'' x''' \ldots x^{(n+1)} = \pm mR$, intendendo per R il coefficiente della potenza x^{m-n} nella proposta equazione $x^{m} - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots \pm T = 0$, il quale avrà nella formola il segno $+$ se n è numero dispari, ed il segno $-$ se n è numero pari.

Per calcolare l'ultima espressione $\Sigma x^{0} x'' x''' \ldots x^{(n+1)}$ si rifletta che essa significa la somma di tutte le quantità

$$x^{0} \Sigma x'' x''' \ldots x^{(n+1)}$$
$$x'' \Sigma x^{0} x''' \ldots x^{(n+1)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^{(n)} \Sigma x^{0} x'' \ldots x^{(n-1)} x^{(n+1)}$$

Ma (110) il numero dei termini che compongono il coefficiente R è $\frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{1.\,2.\,3\ldots n} = N$, ed il numero dei termini che formano ciascuna delle somme $\Sigma x'' x''' \ldots x^{(1+n)}$, $\Sigma x^{0} x''' \ldots x^{(n+1)}$ ec. (in cui manca una delle radici $x^{0}, x'' \ldots x^{(m)}$) è $\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1.\,2.\,3\ldots n}$ $= N(m-n)$. Adunque $\Sigma x^{0} x'' x''' \ldots x^{(n+1)} = \pm R(m-n)$, ed avremo perciò l'ultimo termine $\Sigma x^{0} x'' x''' \ldots x^{(n)} = \pm nR$, e la ricercata formola nel caso di $n < m$ sarà

$$P^{(n)} = AP^{(n-1)} - BP^{(n-2)} + CP^{(n-3)} \ldots\ldots \pm nR$$

Finalmente, ponendo $m \pm n$ in luogo di n, nello stesso analogo discorso risulterà; $P^{(m\pm n)} = AP^{(m\pm n-1)} - BP^{(m\pm n-2)} \ldots\ldots \pm TP^{(\pm n)}$. Questa ultima formola è utile soltanto per la ricerca della somma delle potenze negative $P^{(-n)}$, ma non cessa di essere vera anche nel caso di n frazionario positivo, o negativo,

Facciasi ancora l'importante osservazione, che se sieno date le somme P, $P^{(2)}$ .. $P^{(m)}$ delle radici di una equazione di qualunque grado m, e siano incogniti i coefficienti di lei, si potranno formare per mezzo del presente problema le equazioni

$$P = A \quad , \quad P^{(2)} = AP - 2B$$

$$P^{(3)} = AP^{(2)} - BP + 3C \ldots\ldots, P^{(m)} = AP^{(m-1)} - BP^{(m-2)} \ldots \pm mT$$

e da queste dedurre i valori di tutti i coefficienti B, C .. T

142. Teor. 9°. Nella equazione $x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} \ldots + x^2 + x + 1 = 0$ resultante da $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$ sia p numero *primo*, e sia $p-1$ risoluto nei suoi fattori *primi abcd* ec. La risoluzione della *Proposta* si riduce a risolvere una equazione del grado a, altra del grado b, altra del grado c ec. fino al minimo fattore 2, che formerà l'ultima equazione di secondo grado.

Abbiamo già dimostrato (101) che nella equazione $x^p - 1 = 0$, supposta α una delle radici diversa da 1, tutte le altre sono α^2, α^3 ... α^{p-1}: onde la *proposta* esprime ancora tutte le radici di $x^p - 1 = 0$ se prendasi $x = \alpha$. E poichè abbiamo $x^p = 1$, ed in generale $x^{pq} = 1$, $x^{pq+r} = x^r$; ed inoltre gli esponenti di x formano la serie dei numeri naturali $1, 2, 3 \ldots p-1$, se g è una delle *radici primitive* di p, questi esponenti potranno rappresentarsi colla serie g^0, g^1, g^2 ... g^{p-2}, Laonde la *pro-*

posta, secondo l'usato modo di scrivere prenderà questa forma

$$1+(1)+(g)+(g^2)\ldots\ldots+(g^{p-2})=0$$

Decomponendo $p-1$ nei due fattori ab', dei quali a è *primo*, e b' o *primo* ovvero il prodotto d'altri fattori *primi*; e rappresentando al solito con $(b',1)$ il *periodo* $(1)+(g^a)+(g^{2a})\ldots\ldots+(g^{a(b-1)})$, la somma dei *periodi* $(b',1)+(b',g)+(b',g^2)\ldots\ldots(b',g^{a-1})$ eguaglierà a norma dell'articolo 138 la somma delle radici $(1)+(g)+(g^2)\ldots\ldots(g^{ab'-1})=-1$

Pertanto se facciamo il prodotto $(y-(b',1))\times(y-(b',g))\times\ldots\ldots(y-(b',g^{a-1}))=0$, avremo una equazione del grado a che comprenderà tutte le radici della *proposta* disposte in diversi *periodi*, e questa equazione sarà in generale

$$y^a+y^{a-1}+By^{a-2}-Cy^{a-3}\ldots\ldots\pm T=0$$

Per determinare i coefficienti B, C.. T si faccia uso del precedente Problema, e sarà nel nostro caso $P^{(2)}=-1$, $P^{(2)}=(b',1)^2+(b',g)^2\ldots+(b',g^{a-1})^2$, $P^{(3)}=(b',1)^3+(b',g)^3\ldots\ldots+(b',g^{a-1})^3$, ed infine $P^{(a)}=(b',1)^a+(b'g)^a\ldots+(b',g^{a-1})^a$.

Ma pel Teor. 8°. può calcolarsi primieramente $(b',1)^2$, e ridursi alla forma $Ab'+A'(b',1)+A''(b',g)+A'''(b',g^2)\ldots\ldots+V(b',g^{a-1})$. Cambiando in questa $(b',1)$ in (b',g), $(b'g)$ in (b',g^2) ec. avremo il

valore di $(b',g)^2$, e nel modo istesso con analoghi cangiamenti si otterranno immediatamente dal primo $(b',1)^2$ tutti gli altri prodotti $(b',g)^3 \ldots (b',g)^{a-1}$ ^{2}

Eseguito tutto ciò, e considerando che a norma dell' Articolo 130 abbiamo $(g)^a = (g)^0$, e per conseguenza $(g)^{n+n} = (g)^n$ resta evidente che;

$$(2)\ P = \begin{cases} Ab' + A'(b',1) + A''(b',g) + A'''(b',g)^2 \ldots + V(b',g)^{a-1} \\ Ab' + A'(b',g) + A''(b',g)^2 + A'''(b',g)^3 \ldots + V(b',1) \\ Ab' - A'(b',g)^2 + A''(b',g)^3 + A'''(b',g)^4 \ldots + V(b',g) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ab' + A'(b'g)^{a-1} + A''(b',1) + A'''(b'g) \ldots + V(b',g)^{a-2} \end{cases}$$

Sommando i termini del secondo membro di questa equazione avremo $P^{(2)}$, ovvero $1 - 2B = Aab' - (A' + A'' + A''' \ldots + V)$, e di qui il valore determinato del coefficiente B.

Similmente a norma del citato Teor. 8°. potremo trovare il valore di $(b',1)^3$, e ridurlo alla forma $B'b' + B''(b',1) + B'''(b',g) \ldots + V'(b',g)^{a-1}$. Da questa serie si dedurranno come sopra tutte le altre analoghe, che costituiscono il valore di $P^{(3)}$, e troveremo $P^{(3)}$, ovvero $-P^{(2)} + B + 3C = B'ab' - (B'' + B''' \ldots + V')$, donde si ricaverà il valore determinato del coefficiente C.

Continuando il calcolo collo stesso metodo si determineranno $P^{(4)}$, $P^{(5)}$, ... $P^{(a)}$, e da queste quantità si otterranno i coefficienti tutti D, E... T dell' equazione formata di sopra del grado a.

Se b' non è *primo*, ma sivvero $= bc'$, e sia b fattore primo di $p-1$, e c' o *primo*, o composto di fattori *primi*, potremo risolvere tutti i valori di y in un numero b di *periodi*, ciascuno dei quali contenga un numero c' di termini a norma dell' Art. 139, ed avremo;

$$y=(bc',1)=(c',1)+(c',g^{a})+(c',g^{2a})\ldots+(c',g^{a(b-1)})$$

$$(bc',g)=(c',g)+(c',g^{a+1})+(c',g^{2a+1})\ldots+(c',g^{a(b-1)+1})$$

$$(bc',g^{2})=(c',g^{2})+(c',g^{a+2})+(c',g^{2a+2})\ldots+(c',g^{a(b-1)+2})$$

. . . . . .

$$(bc',g^{a-1})=(c',g^{a-1})+(c',g^{2a-1})+(c',g^{3a-1})\ldots+(c',g^{ab-1})$$

Facciasi adesso il prodotto $(z-(c',1))\times(z-(c',g^{a}))\times(z-(c',g^{2a}))\ldots\times(z-(c',g^{a(b-1)}))=0$ e risulterà l' equazione del grado b

$$z^{b}-yz^{b-1}+Bz^{b-2}-Cz^{b-3}\ldots\ldots\pm T=0$$

Rammentandosi che secondo il precitato articolo abbiamo in questo caso

$$(c',1)=(1)+(g^{ab})+(g^{2ab})\ldots+(g^{(c'-1)ab});$$

e che in generale $(c',g^{ab+n})=(c',g^{n})$, si troverà a norma del Teor. 8°.

$$(c',1)^{2}=Ac'+A'(c',1)+A''(c',g)+A'''(c',g^{2})\ldots V(c',g^{ab-1})$$

$$(c',g^{a})^{2}=Ac'+A'(c',g^{a})+A''(c',g^{a+1})+A'''(c',g^{a+2})\ldots+V(c',g^{a-1})$$

$$(c,g^{2a})^2 = Ac' + A'(c',g^{2a}) + A''(c',g^{2a+1}) + A'''(c',g^{2a+2}) \ldots + V(c',g^{(2a-1)})$$

. . . . . .

$$(c,g^{a(b-1)})^2 = Ac' + A'(c',g^{a(b-1)}) + A''(c',g^{a(b-1)+1}) + A'''(c',g^{a(b-1)+2}) +$$

$\ldots + V(c',g^{a(b-1)-1})$. Adunque $P^{(2)}$, ovvero $y - 2B$

$$= Abc' + A'(bc',1) + A''(bc',g^2) + A'''(bc',g^2), \ldots + V(bc',g^{a-1}),$$

dalla quale equazione ricaveremo il valore determinato del coefficiente B.

Collo stesso processo di calcolo si determineranno primieramente i valori di $(c',1)^3$, $(c',1)^4 \ldots (c',1)^b$, dai quali si otterranno $P^{(3)}$, $P^{(4)} \ldots P^{(b)}$, e da questi i coefficienti tutti C, $D \ldots T$ dell' equazione di sopra del grado b.

Se anche c' non è primo, ed abbiasi $c' = cd'$ (posto c un fattore *primo* di $p-1$, e d' o primo, o composto di *primi*) potremo risolvere tutti i valori di z. in un numero c di *periodi*, ciascuno dei quali conterrà un numero d' di termini. Presa di poi una nuova incognita u, e fatto il prodotto di $(u-(d',1))$ $\times(u-(d',g^{ab}))\times(u-d',g^{2ab}))\ldots\times(u-d',g^{ab(c-1)}) = c$ risulterà l' equazione del grado c

$$u^c - zu^{c-1} + Bu^{c-2} - Cu^{c-3} \ldots \pm T = 0$$

Abbiamo in questo caso $(d',1) = (1) + (g^{abc}) + (g^{2abc}) \ldots + (g^{abc(d'-1)})$, ed in generale $(d',g^{abc+n}) = (d',g^n)$. Con tali dati, e colla scorta del Teor. 8° ci con-

durremo al valore di $P^{(2)}$, ovvero $z^2 - 2B = Acd'$ $+ A'(cd', 1) + A''(cd', g^a) + A'''(cd', g^{2a}) \ldots\ldots$ $+ V(cd', g^{a(b-1)})$, dalla quale equazione resterà determinato il coefficiente B.

Calcolati in seguito i valori di $(d,1)^3$, $(d',1)^4 \ldots$ $\ldots (d',1)^o$, si avranno da questi i valori di $P^{(3)}$, $P^{(4)} \ldots$ $\ldots P^{(c)}$, e quindi i coefficienti tutti C, $D \ldots T$ dell'equazione precedente del grado e

Così progredendo finchè vi sieno fattori composti, si giungerà al minimo fattore 2, che necessariamente dee trovarsi frà quelli di $p-1$ numero pari. Supponendo $d' = 2$, sarà $p-1 = 2abc$, e perciò $\frac{p-1}{2} = abc$. Succederà adunque in questo caso che la serie $(1) + (g^{abc}) \ldots + (g^{abc(d'-1)}) = (d,1)$ si arresterà al secondo termine, ed avremo l'equazione $(1) + (g^{\frac{p-1}{2}}) = (2,1)$

Ma per natura della *radice primitiva* il termine $g^{\frac{p-1}{2}}$ deve avere un *resto* maggiore di 1, che non può eccedere $p-1$. E siccome il prodotto $(g^{\frac{p-1}{2}} - 1)$ $(g^{\frac{p-1}{2}} + 1) = g^{p-1} - 1$ è multiplo di p, come è stato

dimostrato all' Art. 123, e frattanto $g^{\frac{p-1}{2}} - 1$ non può essere multiplo di p, perchè in tale ipotesi il *resto* di $g^{\frac{p-1}{2}}$ sarebbe 1, conviene che sia multiplo di p l'altro fattore $g^{\frac{p-1}{2}} + 1$: perciò il *resto* di $g^{\frac{p-1}{2}}$ sarà $p-1$. Pertanto l' equazione $(1)+(g^{\frac{p-1}{2}})=(2,1)$ si cangerà in $(1)+(p-1)=(2,1)$, ovvero $x+x^{p-1}=(2,1)$. Ma $x^{p-1}=\frac{x^p}{x}=\frac{1}{x}$, dunque $x+\frac{1}{x}=(2,1)$, e quindi l'equazione finale di secondo grado

$$x^2-(2,1)x+1=0$$

Ed ecco determinata x da una equazione di secondo grado per mezzo dell' incognita u di cui un valore è $(2,1)$. Questa incognita dipende da z per una equazione del grado c; l' incognita z dipende da y mediante una equazione del grado b, e finalmente l' incognita y è data per una equazione del grado a. Il che ec.

Applichiamo questo Teorema alla risoluzione di tre equazioni, e sia primieramente proposta a risolversi

$$x^{17}-1=0$$

Una delle *radici primitive* del 17 è il 3: i fattori ab' di 16 l' uno *primo* l' altro composto sono 2×8. Abbiamo pertanto

$$1+(1)+(3)+(3^{2})\ldots+(3^{15})=0$$

ed il periodo $(8,1)=(1)+(3^{2})+(3^{4})\ldots+(3^{14})$ insieme col periodo $(8,3)$ formano tutta la serie $(1)+(3)+(3^{2})\ldots+(3^{15})=-1$; cioè la somma delle radici della *Proposta* esclusa l' unità.

Il prodotto $(y-(8,1))\times(y-(8,3))=0$ dà l' equazione di secondo grado

$$y^{2}+y+B=0$$

In questa il coefficiente $B=(8,1)\times(8,3)$ potrebbe calcolarsi direttamente col Teor. 8. Ma per vedere anche nei casi più semplici l' uso del metodo spiegato di sopra, che è il più comodo quando i valori di y sono molti, e b' è numero grande, cominciò dal calcolare $(8,1)^{2}=(8,2)+(8,3^{2}+1)+(8,3^{4}+1)\ldots+(8,3^{14}+1)=8+3(8,1)+4(8,3)$. Perciò $A=1$, $A'=3$, $A''=4$, $A'''=0$. $\ldots V=0$, e la formola $P^{(2)}$, ovvero $1-2B=Aab'-(A'+A''+A'''\ldots+V)$ diviene $1-2B=16-7$, e quindi $B=-4$. Adunque l' equazione di secondo grado completamente determinata è

$$y^{2}+y-4=0$$

Decomposto $b'=8$ nei due fattori $bc'=2\times4$ risulta il *periodo* $(8,1)=(4,1)+(4,3^{2})$; ed il prodotto $(z-(4,1))\times(z-(4,3^{2}))=0$ dà pure una equazione di secondo grado

$$z^2-(8,1)z+B=0$$

Per determinare B abbiamo in questo caso $(4,1)=(1)+(3^4)+(3^8)+(3^{12})$, e troveremo $(4,1)^2=4+2(4,3)+(4,3^2)$. Considerando poi che $(4,3^2)$ appartiene al *periodo* $(8,1)$, e $(4,3)$ al periodo $(8,3)$, avremo nella formola $y^2-2B=Abc'+A'(bc',1)+A''(bc',g)$ ec. il coefficiente $A=1$, $A'=1$, $A''=2$) e tutti gli altri *zero*: perlochè $y^2-2B=8+(8,1)+2(8,3)$. Ma trovammo già $y^2=(8,1)^2=8+3(8,1)+4(8,3)$, ed $(8,1)+(8,3)=-1$; dunque sostituendo, e riducendo sarà $B=-1$, e l' equazione precedente del secondo grado sarà così determinata.

$$z^2-(8,1)z-1=0$$

Disciolto il fattore $c'=4$ nei due $cd'=2\times2$ reresulta il periodo $(4,1)=(2,1)+(2,3^4)$, ed il prodotto $(u-(2,1))\times(u-(2,3^4))=0$ dà pure un equazione del secondo grado

$$u^2-(4,1)u+B=0$$

Per determinare B abbiamo adesso $(2,1)=(1)+(3^8)$, e troveremo $(2,1)^2=2+(2,3^6)$. E siccome $(2,3^6)$ appartiene al *periodo* $(4,3^2)$, avremo nella formola $z^2-2B=Acd'+A'(cd',1)+A''(cd',g^a)+$ ec.

il coefficiente $A=1$, $A''=1$, o tutti gli altri zero: per lo chè $z^2-2B=4+(4,3)^2$. Ma trovammo qui sopra $z^2=(4,1)^2=4+2(4,3)+(4,3)^2$; dunque sostituendo, e riducendo sarà $B=(4,3)$, ed in conseguenza

$$u^2-(4,1)u+(4,3)=0$$

Abbiamo infine il periodo binario $(2,1)=(1)+(3)^8$; e perchè $(3)^8=(16)$ sarà $(2,1)=x+x^{16}=x+\frac{1}{x}$, e quindi l'equazione finale di secondo grado

$$x^2-(2,1)x+1=0$$

Ecco dunque la risoluzione dell'equazione $x^{17}-1=0$ ridotta a quella delle quattro equazioni di secondo grado

$$y^2+y-4=0$$

$$z^2-(8,1)z-1=0$$

$$u^2-(4,1)u+(4,3)=0$$

$$x^2-(2,1)x+1=0$$

Sia in secondo luogo proposta a risolversi l'equazione $x^{19}-1=0$

Una delle *radici primitive* del 19 è il 2. I fattori ab' del 18 sono 3×6 l'uno *primo*, l'altro composto. Abbiamo pertanto

$$1+(1)+(2)+(2)^2\ldots+(2)^{17}=0$$

ed il *periodo* $(6,1)=(1)+(2)^3+(2)^6\ldots+(2)^{15}$ in-

sieme coi *periodi* $(6,2)+(6,2^2)$ formano tutta la serie $(1)+(2)+(2^2)\ldots+(2^{17})=-1$, cioè la somma delle radici della *Proposta* esclusa l' unità.

Il prodotto $(y-(6,1))\times(y-(6,2))\times(y-(6,2)^2)=0$ dà l' equazione di terzo grado

$$y^3+y^2+By-C=0$$

Per determinare B si calcolerà primieramente $(6,1)^2=6+2(6,1)+(6,2)+2(6,2)+2(6,2^2)$, e quindi col metodo già dimostrato, ed applicato all'esempio precedente troveremo $P^{(2)}$, ovvero $1-2B=18-5=13$, donde risulta $B=-6$

Similmente calcolando $(6,1)^3=12+14(6,1)+11(6,2)+9(6,2^2)$ ne dedurremo P^3, ovvero $-13-6+3C=36-34=2$; e quindi $C=7$. Onde l' equazione precedente del terzo grado sarà.

$$y^3+y^2-6y-7=0$$

Risolvendo $b'=6$ nei due fattori $bc'=3\times2$ risulta il *periodo* $(6,1)=(2,1)+(2,2^3)+(2,2^6)$; ed il prodotto $(z-(2,1))\times(z-(2,2^3))\times(z-(2,2^6))=0$ dà pure una equazione di terzo grado.

$$z^3-(6,1)z^2+Bz-C=0$$

Per calcolare B si rifletta che $(2,1)=(1)+(2^9)$,

onde $(2,1)^2 = 2+(2,2)$, da cui ricaveremo $P^{(2)}$ ovvero $(6,1)^2 - 2B = 6+(6,2)$. Ma trovammo già $(6,1)^2 = 6+2(6,1)+(6,2)+2(6,2^2)$, dunque sostituendo e riducendo resterà $B = (6,1)+(6,2^2)$

Passando a calcolare $(2,1)^3$ si troverà essere $3(2,1)^4 + (2,2)$, e di qui $P^{(3)}$, ovvero $(6,1)\times(P^{(2)} - B) + 3C = 3(6,1)+(6,2)$. Sostituendo quivi i valori di $P^{(2)}$, e di B, e riducendo, si troverà $C = 2+(6,2)$, e la precedente equazine di terzo grado sarà

$$z^3 - (6,1)z^2 + ((6,1)+(6,2^2))z - 2 - (6,2) = 0$$

Non rimanendo a considerare se non il *periodo* binario $(2,1) = (1)+(2)^9 = (1)+(18)$, potremo dedurne l'equazione finale di secondo grado

$$x^2 - (2,1)x + 1 = 0$$

Così la risoluzione dell'equazione $x^{19} - 1 = 0$ è ridotta a quella delle equazioni

$$y^3 + y^2 - 6y - 7 = 0$$

$$z^3 - (6,1)z^2 + \left((6,1)+(6,2^2)\right)z - 2 - (6,2) = 0$$

$$x^2 - (2,1)x + 1 = 0$$

Sia infine proposta a risolversi l'equazione $x^{31} - 1 = 0$

Una delle *radici primitive* del 31 è il 3: i fattori ab' del 30 sono 5×6. Quindi è che sarà

$$1+(1)+(3)+(3^{2})\ldots+(3^{29})=0,$$

ed il *periodo* $(6,1)=(1)+(3^{5})+(3^{10})\ldots+(3^{25})$ insieme coi *periodi* $(6,3)+(6,3^{2})+(6,3^{3})+(6,3^{4})$ comprende tutta la serie $(1)+(3)+(3^{2})\ldots+(3^{29})=-1$, cioè la somma delle radici della *Proposta* esclusa l'unità.

Il prodotto $(y-(6,1))\times(y-(6,3))\ldots\times(y-(6,3^{4}))=0$ dà l'equazione di quinto grado

$$y^{5}+y^{4}+By^{3}-Cy^{2}+Dy-E=0 \qquad 2$$

Per determinare B si troverà primieramente $(6,1)^{2}=6+2(6,1)+2(6,3)+(6,3^{2})$ donde si deduce $P^{(2)}$, ovvero $1-2B=30-5=25$, ed in conseguenza $B=-12$.

Troveremo similmente $(6,1)^{3}=12+15(6,1)+6(6,3)+3(6,3^{2})+3(6,3^{3})+2(6,3^{4})$, donde ricaveremo $P^{(3)}$, ovvero $-25-12+3C=60-34=26$, e quindi $C=21$.

Avremo in seguito $(6,1)^{4}=90+60(6,1)+24(6,3)+28(6,3^{2})+43(6,3^{3})+46(6,3^{4})$, donde si ottiene $P^{(4)}$, ovvero $-26+300-21-4D=450-201=249$, e quindi $D=1$

Infine avremo $(6,1)^{5} = 360 + 342\,(6,1) + 215\,(6,3)^{2} + 193(6,3)^{3} + 264(6,3)^{4} + 222(6,3)^{5}$, donde si ottiene $P^{(5)}$, ovvero $-249+312+525+1+6E = 1800-1236=564$, e quindi $E=-5$. Perciò l'equazione di quinto grado enunciata di sopra sarà

$$y^{5} + y^{4} - 12y^{3} - 21y^{2} + y + 5 = 0$$

Decomposto il $(6,1)$ nei tre *periodi* $(2,1)+(2,3)^{5}+(2,3)^{10}$, e fatto il prodotto $(z-(2,1))\times(z-(2,3)^{5})\times(z-(2,3)^{10}) = 0$ risulta l'equazione di terzo grado.

$$z^{3} - (6.1)\,z^{2} + Bz - C = 0$$

Per calcolare B si rifletta che $(2,1)=(1)+(3)^{15}$, onde $(2,1)^{2} = 2 + (2,3)^{9}$, da cui ricaveremo $P^{(2)}$, ovvero $(6,1)^{2} - 2B = 6 + (6,3)^{4}$. Ma trovammo già $(6,1)^{2} = 6 + 2(6,1) + 2(6,3)^{3} + (6,3)^{4}$, dunque sostituendo, e riducendo resterà $B = (6,1) + (6,3)^{3}$

Passando a calcolare $(2,1)^{3}$ si troverà $= 3(2,1) + (2,3)^{(3)}$, e di qui $P^{(2)}$, ovvero $(6,1)\times(P^{(2)} - B) + 3C$ $3(6,1)+(6,2)$. Sostituendo quivi i valori di $P^{(2)}$, e di B, e riducendo, avremo $C = 2 + (6,3)^{4}$, e la precedente equazione di terzo grado sarà

$$z^3 - (6,1)z^2 + \left((6,1) + (6,3^3)\right)z - 2 - (6,3^4) = 0$$

Pervenuti al *periodo binario* $(6,1) = (1) + (3^{15}) = (1) + (30)$ potremo dedurne l'equazione finale di secondo grado

$$x^2 - (2,1)x + 1 = 0$$

Così la risoluzione dell'equazione $x^{31} - 1 = 0$ è ridotta a quella delle equazioni

$$y^5 + y^4 - 12y^2 - 21y^2 + y + 5 = 0$$

$$z^3 - (6,1)z^2 + \left((6,1) + (6,3^3)\right)z - 2 - (6,3^4) = 0$$

$$x^2 - (2,1)x + 1 = 0$$

143. Si dimostra in Geometria che la divisione della circonferenza del cerchio in un numero p di parti eguali dipende dalla risoluzione dell'equazione $x^p - 1 = 0$. Adunque se p sia numero *primo*, e $p-1$ resulti dal prodotto dei fattori *primi abcd* ec, la enunciata divisione potrà ridursi colla scorta del precedente Teorema alla risoluzione di un equazione del grado a, d'altra del grado b, d'altra del grado c ec. Che se abbiasi $p-1 = 2^n$, la divisione medesima in un numero *primo* $2^n + 1$ di parti eguali potrà eseguirsi con una costruzione geometrica di secondo grado. Il trattare questa particolare, e bellissima applicazione del Teor. medesimo mi porterebbe fuori dei confini del soggetto di questo Libro: ne ho dato un esempio per la divisione della periferia in 17 parti eguali nei miei Elementi di Geometria stampati in Siena l'Anno 1816.

INDICE

Cap. I. *Algoritmo dei numeri intieri* Pag. 3
§ 1. Definizione dell' Aritmetica » ivi
2. Sistema della numerazione » ivi
3. 4. Metodo per leggere, e per scrivere un numero qualunque di più cifre » 4
5. Definizioni delle Operazioni dell' Aritmetica » 5
6. Quali Operazioni si comprendano nell' Aritmetica ordinaria » 6
7. 8. Spiegazione dei segni algebrici. Pregio di questi segni » 7
9. Somma, e sua riprova » 11
10. 11. Sottrazione, e sua riprova » ivi
12. Moltiplica, e sua riprova » 13
13. Come debba intendersi la moltiplica allorchè i fattori sono eterogenei » 17
14. Dimostrazione della identità dei prodotti se l' uno, o l' altro dei fattori si prende per moltiplicare » 18
15. 16. Divisione semplice » 22
17. 18. Divisione maggiore eseguita in più modi » 23
19. Spiegazione dei diversi modi di concepire la divisione » 27
20 Dimostrazione della riprova del 9 » 29
Cap. II. *Algoritmo delle frazioni* » 31
21. 22. Definizioni delle varie specie delle frazioni » ivi
23. 24. Come un rotto possa crescere, e scemare, e come non muti valore mol-

tiplicando, o dividendo i suoi termini per lo stesso numero Pag. „ 32
§. 25. Metodo di schisare i rotti, e di ridurgli allo stesso denominatore „ 33
26 Trasformare un intiero in un rotto apparente, e riunire in un rotto improprio un numero intiero con un rotto annesso „ 38
27 . . . 30 Le quattro Operazioni su i rotti „ ivi
Cap. III. *Algoritmo delle frazioni decimali* „ 43
31. Natura delle frazioni decimali „ ivi
32. Trasformazione dei rotti in frazioni decimali „ 45
33. Quale deve essere una frazione ordinaria per risolverla in una decimale completa. Somma di una decimale completa „ 49
34. Quale deve essere una frazione ordinaria, acciò svolta in decimale dia un periodo che cominci dalla prima cifra. Somma di una decimale periodica „ 54
Problema. Trovare tutte le frazioni $\frac{p}{n}$, in cui n non è $10^r - 1$, le quali ridotte a decimali danno un periodo di r cifre incominciando dalla prima „ 58
35. Quale deve essere una frazione ordinaria, acciò svolta in decimale dia un periodo, che incominci dopo un dato numero di cifre „ 59
Somma delle frazioni decimali col periodo dopo alcune cifre „ 60
Problema. Trovare il più semplice rotto $\frac{p}{n}$ che dopo un numero r di cifre decimali abbia un periodo di m cifre „ 62

§ 36. Alcune considerazioni sovra le frazioni decimali incomplete senza periodo *Pag.* „ 63
37....40. Le quattro Operazioni su le frazioni decimali „ 63
Cap. IV. *Algoritmo delle quantità letterali* „ 69
41....45. Definizione dell' Algebra. Spiegazione dei segni, dei coefficienti ec. „ ivi
46. 47. Somma, e sottrazione algebrica „ 73
Applicazione della somma, e sottrazione algebrica alla risoluzione delle equazioni di primo grado. „ 76
48. 49. Definizione delle equazioni. Spiegazione di ciò che loro appartiene. Risoluzione delle equazioni di primo grado ad una, ed a più incognite „ 77
50. Moltiplica Algebrica „ 88
51. Spiegazione della parola *dimensione* applicata ai termini Algebrici „ 91
52. I prodotti algebrici sono sempre gli stessi qualunque sia la permutazione delle quantità da cui sono formati „ 93
53. Alcuni utili teoremi dimostrati colla moltiplica „ 95
54. Metodo per compire il *quadrato*, ed il *cubo* „ 96
55 Formole del *quadrato*, e del *cubo* di un *polinomio* „ 98
56. Divisione Algebrica *m* „ 102
57. Alcune riflessioni sulla divisione di $x - 1$ per $x - 1$ „ 106
58, 59. Cosa significhino l' esponente negativo, l' esponente frazionario „ 107
60. Come debba intendersi la frazione che ha per denominatore il zero, e quella che lo ha per numeratore, e denominatore „ 109

§ 61. *Frazioni Algebriche.* Natura loro, metodo per eoluarle *Pag.* „ 112
62. Algoritmo delle frazioni Algebriche „ 115
63. *Quantità radicali, ed immaginarie.* Natura dei *radicali* ... „ 116
64. Due teoremi sulla moltiplica dei *Monomj radicali* „ 118
65. Algoritmo dei *radicali* „ 119
66. Come possano esistere le quantità *immaginarie* „ 126
67. Modo di esprimerle per maggior chiarezza del calcolo „ 127
68. Algoritmo delle quantità *immaginarie* „ 128
69. *Estrazione della Radice quadra, e della cuba* „ 130
70. Estrazione della radice quadra, e cuba dai *Monomj* „ ivi
71 ....74 Metodo di estrarre la radice quadra. Sua applicazione ai numeri con opportune osservazioni „ 137
75...77. Estrazione della radice quadra per approssimazione dai numeri intieri, e frazionarj „ 138
78.79 Metodo di estrarre la radice cuba. Sua applicazione ai numeri . „ 141
80. 81. Estrazione della radice cuba per approssimazione dai numeri intieri, e frazionarj „ 148
82. Estrazione della radice quadra, e cuba dai *polinomi* algebrici „ 149
Cap. V. *Teorica delle equazioni di primo grado e sua applicazione alla risoluzione dei Problemi* „ 155
83.. .91. Equazioni di quoto, ovvero *Proporzioni.* Regole che ne dipendono. „ ivi

§ 92. 93. Problemi di primo grado. Regole di falsa posizione semplice, e composta applicata ai medesimi. *Pag.* „ 169
94....98. Metodo generale per la risoluzione delle Equazioni di primo grado a più incognite, e sua Applicazione „ 184
Cap. VI. *Risoluzione Algebrica delle equazioni di secondo, terzo, e quarto grado* „ 204
99. Alcune proprietà generali delle Equazioni „ ivi
100. 101. Risoluzione delle equazioni di secondo grado, e delle *derivative* del secondo grado „ 209
102. Metodo di togliere il secondo termine dalle equazioni di 3°., e 4°. grado „ 222
103....108. Risoluzione delle equazioni di 3°. grado. Esame del caso *irriducibile*, e di altri casi. Due Problemi di terzo grado „ 224
109. Risoluzione delle equazioni di quarto grado. Problema di 4°. grado „ 249
Cap. VII. *Potenze, e radici* „ 255
110. Riflessioni sullo sviluppo del binomio $(x+a)^m$ allorché m è numero intiero, e positivo. „ ivi
111. Dimostrazione generale della formola per elevare un binomio ad una qualunque potenza „ 256
112. Estensione della stessa formola per l' elevazione di un *polinomio* ad una qualunque potenza „ 264
113. Metodo per togliere un termine qualunque da qualunque equazione 270
114. Estrazione della radice di qualunque grado da un binomio per approssimazione „ 271

§ 115. Sviluppamento in serie di $(a+b\sqrt{-1})^m$ $\pm(a-b\sqrt{-1})^m$ *Pag.* „ 275
116. Risoluzione di molte equazioni di tutti i gradi collo stesso metodo usato per quelle del terzo grado „ 279
Cap. VIII. *Quantità esponenziali, e Logaritmi* „ 282
117. Notizie preliminari su i *logaritmi* „ ivi
118 Spiegazione del sistema dei *logaritmi* „ 284
119. Metodo per ridurre i *logaritmi* calcolati per una *base* ai *logaritmi* da calcolarsi per altra *base*. Definizione del *modulo* x „ 289
120. Risoluzione dell' equazione $a^x = y$ dalla quale dipende il calcolo dei *logaritmi* „ 290
121. Applicazione dei *logaritmi* alla risoluzione di alcuni problemi. „ 295
Cap. IX. *Alcuni Teoremi, e Problemi Aritmetici* „ 299
122. Teorema 1°. Se p sia un numero assolutamente *primo*, e non *submultiplo* della somma dei numeri $a+b+c+d+$ ec, la differenza $(a+b+c+d+\text{ec.})^p - (a^p+b^p+c^p+d^p+\text{ec.})$ sarà multipla di p. „ ivi
123. Se un numero qualunque A non è multiplo di p, la sarà $A^{p-1}-1$. Osservazione su questa conseguenza. „ ivi
124. Teor. 2° Essendo p numero *primo* e non *submultiplo* delle cognite q, r il trinomio x^2+qy^2+r può sempre de-

terminarsi in modo che sia multiplo di p Pag. „ 300

§ 125. Teor 3°. Il prodotto di un qualunque numero di fattori, ciascuno dei quali sia la somma di quattro quadrati, forma sempre la somma di quattro quadrati. „ 302

126. Teor. 4°. Qualunque numero o è un quadrato, o comprende la somma di due, di tre, o di quattro quadrati al più. „ 304

127. Problema 1°. Decomporre qualsivoglia numero in quattro quadrati al più. „ 308

128 Prob. 2°. Determinare quanti sonoi numeri positivi minori del positivo numero A, e *primi* con esso „ 312

129. Teor. 5°. il numero resultante dal prodotto $1.a.b.c.\ldots(A-1)\pm 1$, i di cui fattori $a, b, c\ldots, A-1$ sieno tutti i minori e primi con A è multiplo di A. Dee prendersi il $+1$ nel caso di $A=2$, ovvero 2^2; e nel caso di $A=p$, ovvero p^n, ovvero $2p^n$, denotando p un numero *primo* diverso da 2. In tutti gli altri casi dee prendersi il -1. „ 313

130. Teor. 6°. Nella serie delle potenze a^0, a^1, a^2, a^3 ec. se ciascun termine si divida pel numero p *primo* con a, i differenti resti di tal divisione incominciando da 1 debbono tornare i medesimi, e collo stesso periodo dopo

un termine a^t, in cui $t<p$. E se inoltre p è numero assolutamente *primo*, sarà $t=p-1$, ovvero *submultiplo* di $p-1$. Pag. „ 319

§ 131. Metodo di trovare speditamente il resto della divisione di a^m per p *primo* con a essendo m numero grande quanto si voglia. „ 320

132. Definizione della *radice primitiva*. Esempio del 2 *radice primitiva* del 19 „ 321

133. Teor 7°. Supposto il numero a una delle *radici primitive* del numero *primo* p, ed il numero h minore, e primo con $p-1$, il resto r della divisione $\frac{a^h}{p}$ sarà ancora *radice primitiva* di p „ 322

134. Le *radici primitive* di un numero *primo* p minori di $p-1$ sono tante quanti i numeri minori, e *primi* con $p-1$ „ 323

135. Prob. 3°. Trovare una delle *radici primitive* di qualunque numero primo p „ ivi

136. Applicazione di questo problema alla ricerca delle *radici primitive* di 31.

137. Definizione del *periodo*, sue proprietà, e modo di annunziare brevemente il *periodo* ed i suoi termini „ 327

138. 139 Conseguenze sulla stessa materia. „ 330

140. Teor. 8°. che insegna a moltiplicare due, e più *periodi simili*, ed altri principj importanti „ 332

141 Prob. 4°. Trovare una formola, che per mezzo dei coefficienti A, B, C... T di una equazione qualunque dia la

somma delle potenze n^{sime} delle sue radici Pag. » 336

§ 142. Teor. 9°. Nella equazione $x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} \ldots + x + x^2 + 1 = 0$ resultante da $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$ sia p numero *primo*, e sia $p-1$ risoluto nei suoi fattori *primi abcd* ec. La risoluzione della *Proposta* si riduce a risolvere una equazione del grado a, altra del grado b, altra del grado c ec. fino al minimo fattore 2, che formerà l'ultima equazione di secondo grado. » 340

Applicazione di questo Teor. alla risoluzione delle equazioni $x^{17} - 1 = 0$, $x^{19} - 1 = 0$, $x^{31} - 1 = 0$. » 346

143. Cenno sull'applicazione dello stesso Teor. alla divisione della periferia del cerchio in parti egnali. » 354